



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

MESTRADO

MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

**CÁLCULO DA *LOSS GIVEN DEFAULT* NO CRÉDITO À
HABITAÇÃO COM CADEIAS DE MARKOV**

JOSÉ EDUARDO FIDALGO FREIRE CRUZ

SETEMBRO DE 2012



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

MESTRADO

MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

**CÁLCULO DA *LOSS GIVEN DEFAULT* NO CRÉDITO À
HABITAÇÃO COM CADEIAS DE MARKOV**

JOSÉ EDUARDO FIDALGO FREIRE CRUZ

ORIENTAÇÃO:

PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

DR. PEDRO LOURENÇO CUNHA SANTOS LOUREIRO

SETEMBRO DE 2012

CÁLCULO DA *LOSS GIVEN DEFAULT* NO CRÉDITO À HABITAÇÃO COM CADEIAS DE MARKOV

JOSÉ EDUARDO FIDALGO FREIRE CRUZ

ORIENTADORES: PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

DR. PEDRO LOURENÇO CUNHA SANTOS LOUREIRO

MESTRADO EM: MATEMÁTICA FINANCEIRA

RESUMO

O Acordo de Basileia II determina, entre outros, o requisito de fundos mínimos que os bancos necessitam de manter, de modo a protegerem-se do risco de crédito. Um dos parâmetros essenciais na avaliação do requisito é a LGD – *Loss Given Default*, que representa a perda sofrida pela instituição quando os seus clientes entram em incumprimento.

O objetivo principal do projeto é desenvolver um modelo e uma metodologia que possibilitem o cálculo deste parâmetro recorrendo a Cadeias de Markov. O estudo incidirá sobre o crédito à habitação, pela sua importância para a maioria dos bancos.

Ao longo da exposição será visto que as Cadeias de Markov constituem um instrumento adequado para completar a informação necessária ao cálculo da LGD, cumprindo todas as exigências que o Acordo determina.

PALAVRAS - CHAVE: Acordo de Basileia II, Risco de crédito, LGD, Cadeias de Markov.

CÁLCULO DA *LOSS GIVEN DEFAULT* NO CRÉDITO À HABITAÇÃO COM CADEIAS DE MARKOV

JOSÉ EDUARDO FIDALGO FREIRE CRUZ

SUPERVISORS: PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES
 DR. PEDRO LOURENÇO CUNHA SANTOS LOUREIRO

MASTER IN: FINANCIAL MATHEMATICS

ABSTRACT

Basel II determines, among other things, the minimum capital requirement, which is the amount that banks need to keep in order to protect against credit risk. One of the key parameters for the calculation of the capital requirements is the LGD – Loss Given Default.

The objective of this project is to develop a model and a framework to calculate the LGD using Markov Chains. A special attention is given to mortgages due to the importance of this kind of loans to the banking sector.

In this work, using Markov Chains, it will be possible to predict the missing information that is required by Basel II to calculate the minimum capital requirements.

KEYWORDS: Basel II, Credit Risk, LGD, Markov Chains.

Índice

1. Introdução	11
2. Basileia e Risco de Crédito	13
2.1 Os Acordos de Basileia.....	13
2.2 Risco de Crédito.....	14
2.3 <i>Loss Given Default</i>	17
3. Cadeias de Markov.....	20
3.1 Processos de Markov	20
3.1.1. Cadeias de Markov em tempo discreto	20
3.1.2. Cadeias de Markov em tempo contínuo	22
3.2 O problema das Matrizes Embutíveis	23
3.2.1 Ajuste Diagonal e Ajuste por Pesos	23
3.2.2 Método de Quasi-Otimização.....	24
3.2.3 Otimização Componente a Componente.....	26
3.2.4 Obtenção de um gerador único para várias matrizes de transição	26
4. A Base de Dados	28
5. Metodologia e Resultados	33
6. Conclusão.....	44
Referências Bibliográficas.....	47
ANEXO A - Dedução do Capital Regulatório	49
ANEXO B – Alguns Resultados	51
ANEXO C - Evolução das Probabilidades Globais por Ramo.....	60

Lista de Figuras

Figura 1 – Expected e unexpected loss.....	14
Figura 2 – Representação dos ramos	29
Figura 3 – Dados conhecidos e dados desconhecidos	30
Figura 4 – Dados conhecidos e desconhecidos, período a período	31
Figura 5 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 1	60
Figura 6 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 2	60
Figura 7 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 3	61
Figura 8 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 4	61
Figura 9 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 5	62
Figura 10 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 6 ...	62
Figura 11 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 7 ...	63
Figura 12 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 8 ...	63

Lista de Tabelas

Tabela I – Distribuição dos contratos por anos e ramos.....	29
Tabela II – EAD dos contratos divididos por períodos	34
Tabela III – Probabilidade dos contratos divididos por ramos	34
Tabela IV – Distância entre os geradores e as matrizes de transição	36
Tabela V – Distância às matrizes de transição com um único gerador	37
Tabela VI – Probabilidades parciais do ano 2006 para o período +0.....	39
Tabela VII – Distribuição da EAD dos contratos de 2006.....	39
Tabela VIII - Probabilidades parciais do ano 2006 para o período +1	39
Tabela IX – <i>Loss Rates</i> e LGD por ramos.....	42
Tabela X – LGD por períodos	42
Tabela XI – Distribuição das probabilidades parciais conhecidas	51
Tabela XII – Probabilidades parciais em tempo contínuo entre 2003 e 2007 (obtidas com um único gerador).....	52
Tabela XIII – Probabilidades parciais em tempo contínuo entre 2008 e 2011 (obtidas com um único gerador).....	53
Tabela XIV - Probabilidades parciais em tempo discreto entre 2003 e 2007	54
Tabela XV - Probabilidades parciais em tempo discreto entre 2008 e 2011.....	55
Tabela XVI – Probabilidades globais (todos os contratos e um gerador) em tempo contínuo entre 2003 e 2007	56
Tabela XVII – Probabilidades globais (todos os contratos e um gerador) em tempo contínuo entre 2008 e 2011	57
Tabela XVIII – Probabilidades globais (todos os contratos) em tempo discreto entre 2003 e 2007	58

Tabela XIX - Probabilidades globais (todos os contratos) em tempo discreto entre 2008	
e 2011	59

Lista de Abreviaturas

EAD – *Exposure at Default*

EL – *Expected Loss*

IRB – *Internal Ratings Based*

LGD – *Loss Given Default*

M – *Maturidade*

PD – *Probability of Default*

UL – *Unexpected Loss*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Doutor Onofre Simões, por aceitar o convite de realizar este projeto comigo e por todos os seus valiosos conselhos.

Ao Dr. Pedro Loureiro, por ter sido uma constante ajuda; sem as suas ideias e orientação este projeto não teria sido concluído.

À KPMG, em especial à Dra. Rita Costa, pela oportunidade que me foi concedida em realizar este estágio.

A toda a minha família: sem o apoio deles nunca poderia estar a fazer estes agradecimentos.

À instituição financeira que forneceu os dados, sem os quais não seria possível a realização do projeto.

Por fim, mas não menos importante, à minha amiga, colega e namorada Alexandra, que esteve sempre disponível com conselhos sábios e apoio incondicional.

1. Introdução

Para concluir o mestrado em Matemática Financeira, optou-se pela realização de um estágio curricular na KPMG *Advisory* durante cinco meses, o que permitiu aprofundar os conhecimentos obtidos na parte curricular, principalmente em “Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos” e “Investimentos e Mercados Financeiros”. O estágio possibilitou ainda a descoberta de muitos aspectos da realidade para além do mundo académico.

O Acordo de Basileia II é um marco na história financeira mundial; desde que foi introduzido, as entidades financeiras por todo o mundo necessitaram de se adaptar às exigências nele definidas. Como será visto ao longo do trabalho, o Acordo é dividido em três pilares: Pilar I - Requisitos mínimos de fundos próprios; Pilar II – Processo de Supervisão; Pilar III – Disciplina de Mercado. O presente projeto incide sobre o primeiro pilar.

O Pilar I concentra-se no capital que o banco necessita de reservar, de modo a proteger-se dos diversos riscos a que se encontra exposto, como o risco de crédito, risco de mercado ou o risco operacional; para o cálculo de tal montante são necessários três parâmetros: *Probability of Default*, *Loss Given Default* e *Exposure at Default*.

Este trabalho irá incidir essencialmente sobre o cálculo da LGD, visto que é um parâmetro de extrema importância no cálculo dos requisitos de fundos próprios, afetando diretamente a sua magnitude. Será para isso introduzido um modelo envolvendo Cadeias de Markov, tanto em tempo discreto como em tempo contínuo.

O estudo irá concentrar-se numa carteira de crédito à habitação, daqui resultando que o risco presente é o risco de crédito. A necessidade de recorrer às Cadeias de Markov resulta das condições expressamente estabelecidas no Acordo, nomeadamente no que se refere à existência de dados internos para o cálculo. Deve notar-se que o modelo desenvolvido pode ser estendido a qualquer outra carteira de crédito.

Os resultados deste modelo, como será visto mais adiante, são bastante satisfatórios. Na verdade, são semelhantes aos obtidos pela instituição, diminuindo até o valor da LGD. Este facto é bastante importante, tendo em conta a crise de falta de liquidez sentida no setor financeiro.

O texto tem a seguinte estrutura. No Capítulo 2 é sumariamente descrito o Acordo de Basileia II, a importância da LGD e as dificuldades associadas ao seu cálculo. No Capítulo 3, é feita uma breve exposição teórica sobre Cadeias de Markov e no capítulo seguinte são descritas as bases de dados usadas. No penúltimo capítulo são apresentadas as metodologias utilizadas e referidos os resultados obtidos e, por fim, no Capítulo 6 são discutidas as conclusões.

2. Basileia e Risco de Crédito

2.1 Os Acordos de Basileia

Os dois Acordos de Basileia foram preparados por um comité de Bancos Centrais e de Entidades de Supervisão, de diversos países, que procuraram estabelecer normas para a alocação dos requisitos de fundos próprios pelas instituições de crédito, de modo a cobrir satisfatoriamente os riscos a que estão expostas.

O risco de crédito é um dos riscos a que as entidades bancárias estão sujeitas, para as entidades bancárias comerciais é até o principal risco. Define-se risco de crédito como a possibilidade da contraparte, num contrato financeiro, não cumprir com as obrigações a que se compromete contratualmente (Bielecki & Rutkowski (2010)).

Uma situação de *Default* ou incumprimento é definida em BCBS (2006)¹ quando se verificam as seguintes condições: (1) Decorridos 90 dias sobre a data do vencimento, o cliente não fez qualquer pagamento (ao banco); (2) O banco considera que o cliente não tem intenções de satisfazer as suas obrigações de crédito. Os elementos que podem indicar uma possível falta de pagamento encontram-se no parágrafo 453 em BCBS (2006).

Quando o primeiro acordo foi introduzido, em 1988, tinha por finalidade fortalecer a solidez e estabilidade do sistema financeiro. O acordo de Basileia II veio reforçar o Acordo anterior, no sentido de assegurar que os requisitos de fundos próprios acompanham as alterações de perfil de risco das instituições. Procurou também

¹ BCBS é a sigla aqui usada para ‘Basel Committee on Banking Supervision’.

desenvolver incentivos para estas mensurarem, monitorizarem e gerirem os riscos a que estão expostas.

2.2 Risco de Crédito

Todos os bancos suportam perdas devido ao crédito malparado, mas evidentemente não é possível prevê-las com exatidão, devido ao seu carácter incerto. Pode, no entanto, estimar-se o seu valor esperado (EL – *Expected Loss*), entendido como perdas inerentes à atividade. Os problemas maiores são as chamadas “grandes perdas”, não previstas pelas instituições, e por isso designadas perdas não esperadas (UL – *Unexpected Loss*).

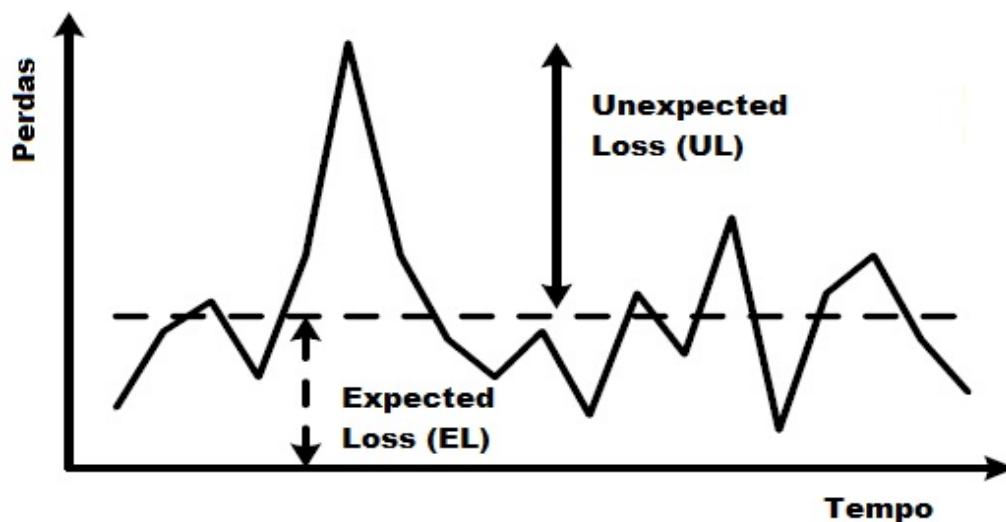


Figura 1 – Expected e unexpected loss (Fonte: BCBS (2005a))

As instituições necessitam de deter capitais suficientes para que as perdas sofridas não ponham em causa a sua viabilidade. Uma vez que a cobertura de todas as possíveis perdas, tanto as esperadas como as não esperadas, não é admissível, é indispensável procurar um equilíbrio. Por outras palavras, é necessário calcular o capital necessário (K) para cobrir de uma maneira eficaz as perdas futuras.

É fácil intuir que pode haver diferentes critérios e soluções para estimar os requisitos de fundos próprios. Aqui importa referir a solução proposta em Basileia II, que tem por critério a frequência de incumprimentos de um banco, em relação aos seus investidores, ou seja, a probabilidade de um banco sofrer perdas tão significativas que ficará incapacitado para satisfazer os seus compromissos e entrará ele próprio em incumprimento. A probabilidade do banco conseguir cumprir os seus compromissos está fixada, pelo Acordo, em 99,9%.

Atendendo à natureza da atividade bancária, o incumprimento dos bancos resulta, em princípio, do incumprimento dos seus clientes (por vezes, resulta de aplicações muito arriscadas do próprio banco). Para avaliar o incumprimento dos clientes usam-se essencialmente três indicadores:

- PD (*Probability of Default*): probabilidade de um cliente entrar em incumprimento num dado horizonte temporal (por definição dada no Acordo, um ano).
- EAD (*Exposure at Default*): valor em dívida pelo cliente, à instituição, no momento do incumprimento.
- LGD (*Loss Given Default*): valor que a instituição perde efetivamente, quando o cliente entra em incumprimento. Normalmente é uma percentagem da EAD.

A Maturidade (M) também é um parâmetro usado, sendo os seus valores estabelecidos pelo Acordo.

O pilar I propõe dois métodos para o cálculo destes indicadores: O Método *Standard* e o Método dos *Ratings* Internos (IRB – *Internal Ratings Based*).

O primeiro método baseia-se em informações externas, como as notações divulgadas por agências de *rating* ou pelo Banco de Portugal, que ponderam o risco em função do cliente e do tipo de exposição. O Método dos *Ratings* Internos tem duas variantes: IRB

Foundation e *IRB Advanced*. Na variante *IRB Foundation*, a instituição bancária calcula internamente a *PD*, a probabilidade de incumprimento dos seus clientes, sendo os restantes parâmetros (*LGD* e *EAD*) calculados a nível externo. Na abordagem *IRB Advanced*, o banco calcula internamente as três estimativas.

As instituições autorizadas a usar *IRB Advanced* tradicionalmente necessitam de menos capital do que o resultante da abordagem *Foundation*, que por sua vez é menos “cega” do que o método *Standard*; daí a importância dos bancos desenvolverem os seus próprios modelos. A fórmula avançada no Acordo para o cálculo do capital é

$$K = \left(LGD \times N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right] - PD \times LGD \right) \times f(PD, M), \quad (1)$$

onde $N[\cdot]$ é a função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória Normal padrão e $G[\cdot]$ é a sua inversa; R mede a correlação entre os diferentes ativos, neste caso empréstimos; e $f(PD, M)$ é uma função linear que depende da probabilidade de incumprimento e da Maturidade M (cf. BCBS (2006), parágrafo 272) e torna mais conservadoras as estimativas de fundos próprios.

No Anexo A encontra-se a dedução da fórmula, mas o raciocínio subjacente é talvez mais revelador e baseia-se no seguinte: num portfólio muito diversificado o risco idiossincrático é neutralizado e só o risco sistemático afeta a rentabilidade. Assim, é possível considerar que os ativos desse portfólio serão afetados por um único factor, por exemplo, o PIB do país, ou o nível de desemprego. Com esta hipótese consegue-se estimar as perdas esperadas e não esperadas, associadas ao portfólio.

O modelo transforma probabilidades de incumprimento “não condicionais” (calculadas pelos próprios bancos, se usarem a abordagem IRB) em probabilidades de incumprimento condicionais, por meio de $N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right]$; esta probabilidade de incumprimento reflete a influência do referido factor de risco no portfólio detido e, de certa forma, introduz algum conservadorismo às probabilidades de incumprimento estimadas. $LGD \times N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right]$ representará então a totalidade das perdas, em percentagem da *EAD*. Sendo as perdas esperadas dadas por $PD \times LGD$, a diferença em (1) diz respeito às perdas não esperadas, as críticas.

2.3 Loss Given Default

Sendo um dos principais objetivos deste trabalho a modelação da *LGD*, é necessário salientar a sua importância, métodos para o cálculo e problemas associados à obtenção das estimativas. A importância de uma correta estimação da *LGD* resulta de (1), que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$K = LGD \times \left(N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right] - PD \right) \times f(PD, M) \quad (2).$$

K é linearmente dependente da *LGD*, por exemplo, uma variação de 1% na *LGD* implica uma variação de 1% no requisito de fundos mínimos. Tendo em conta os elevados valores com que as instituições financeiras trabalham, a diferença de 1%, por exemplo, pode representar um valor extremamente elevado.

De acordo com BCBS (2005b) existem quatro métodos para o cálculo da *LGD*: *market LGD*, que utiliza os preços de mercado de obrigações que entraram em incumprimento,

comparando os preços antes e depois do momento do incumprimento; *workout LGD*, baseado nos *cash-flows* que resultam da recuperação dos clientes, após incumprimento, descontados à data do incumprimento (com este processo obtém-se a recuperação de um determinado cliente, e a *LGD* é evidentemente igual à diferença entre a *EAD* e o valor recuperado descontado); no terceiro método, *implied market LGD*, a *LGD* é derivada a partir dos *spreads* de crédito de obrigações com risco, que representam uma perda esperada que pode ser decomposta em *PD* e *LGD*; finalmente, apenas para portfólios de retalho, a *LGD* pode ser calculada com base nos valores das perdas esperadas e nos valores das probabilidades de incumprimento, método conhecido como *implied historical LGD*.

Para obter estimativas da *LGD* de acordo com o Banco de Portugal (2007), as instituições devem ter em conta todos os dados, informações, métodos relevantes e também devem proceder à estimação por grau ou categoria de risco, tendo em conta todos os casos de incumprimento registados. As estimativas devem ser produzidas com base na experiência adquirida, ser plausíveis, ter fundamento nos principais determinantes de risco e ser suficientemente conservadoras.

As instituições podem recorrer tanto a dados externos como internos, recolhidos ao longo de um período mínimo de cinco anos (sete anos, relativamente a, pelo menos, uma fonte de dados). Para carteiras de retalho os dados necessitam apenas de cobrir um período de cinco anos (BCBS (2006)). Em qualquer dos casos devem ser representativos e adequados para o estabelecimento das previsões. As estimativas produzidas espelharão o mais possível a experiência a longo prazo.

Para as estimativas da *LGD* serem mais conservadoras, em BCBS (2006), parágrafo 468, estabelece-se que para o cálculo do capital necessário se pode fazer um ajustamento na *LGD* calculada, obtendo-se a chamada *downturn LGD*. O valor da

downturn LGD não pode ser inferior ao obtido quando se calcula a média ponderada pelas diferentes categorias ou graus e deve refletir a existência de condições económicas adversas, períodos de recessão onde se prevê que os incumprimentos sejam em maior número.

O Acordo de Basileia II não especifica exatamente como o cálculo deve ser feito, nem como identificar os períodos de recessão, é um assunto deixado ao critério de cada banco para aprovação das entidades supervisoras. Diferentes soluções foram entretanto propostas: considerar a correlação entre a *PD* e a *LGD*, Frey (2000) e Witzany (2011), pois a fórmula de cálculo dos requisitos de fundos próprios não a inclui; usar cópulas, Hui Li (2010); modificar os macro factores que influenciam o cálculo, de modo a refletirem a presença das recessões, Ozdemir e Miu (2009); Chalupka e Kopecsni (2008) recomendam um factor de desconto mais elevado.

Apesar de todos estes contributos, o cálculo da *LGD* (em qualquer dos métodos) é frequentemente muito complicado, sobretudo devido às exigências do Acordo relativamente aos dados, que as instituições financeiras nem sempre têm disponíveis. Nesses casos é imprescindível encontrar formas aceitáveis de contornar o problema. Neste trabalho procurou fazer-se isso recorrendo a Cadeias de Markov, que serão sumariadas nos seus aspectos essenciais no próximo capítulo.

3. Cadeias de Markov

Introduzem-se aqui só os elementos necessários para o trabalho. Para um estudo mais profundo há inúmeros textos, por exemplo, Feller (1968), sobre probabilidades, e Norris (1998) ou Resnick (2002), para Cadeias de Markov.

3.1 Processos de Markov

Um processo estocástico X_t é um processo de Markov se e só se para todo $0 \leq s \leq t$, $P[X_t \leq x | \mathcal{F}_s] = P[X_t \leq x | \sigma(X_s)]$, onde \mathcal{F}_s é a sigma-álgebra gerada pelo processo X_t até ao momento s e $\sigma(X_s)$ é a sigma-álgebra gerada por X_s . Esta igualdade traduz a propriedade de Markov, que afirma que a distribuição condicional de X_t não muda, quer se considere toda a informação passada ou apenas a informação mais recente.

3.1.1. Cadeias de Markov em tempo discreto

Dada uma particular população, cada elemento desta população pode encontrar-se em cada instante num determinado estado. A evolução da população pelos diferentes estados será modelada através de Cadeias de Markov. Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ com valores num espaço E é uma Cadeia de Markov se e só se a propriedade de Markov é verificada.

$$P[X_{n+m} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+m} = j | X_n = i].$$

X_n é uma Cadeia de Markov finita. Mais ainda, como o número de estados é finito, seja L , então $E = \{1, \dots, L\}$. As probabilidades de transição entre os estados são

$P[X_{n+m} = j | X_n = i] = p_{ij}(n, n+m)$. X_n é uma Cadeia de Markov homogénea se $p_{ij}(n, n+m)$ não depende de n , apenas de m . Se assim for, $P[X_{n+m} = j | X_n = i] = P[X_m = j | X_0 = i] = p_{ij}^{(m)}$.

As probabilidades de transição são agrupadas numa matriz denominada matriz de transição. Esta matriz tem diversas propriedades: em primeiro lugar, como os elementos de cada linha são probabilidades, só podem tomar valores no intervalo $[0,1]$; além disso, a soma dos elementos de cada linha é igual a 1. O facto de as probabilidades de transição serem agrupadas numa matriz é extremamente útil, pois a distribuição da população inicial, X_0 , e a matriz de transição permitem obter sem dificuldades a distribuição de X_m , da população em estudo, passadas m unidades de tempo.

Seja P uma matriz de transição. Como se vai trabalhar só com cadeias homogéneas, o cálculo da matriz de transição a m -passos, seja $P(0, m)$, é trivial: $P(0, m) = P^m$. A justificação para se poder considerar que existe homogeneidade reside no facto de a instituição em causa fazer ela própria a classificação dos contratos em subconjuntos (correspondentes aos ramos) com comportamentos muito homogéneos ao longo do tempo.

Um estado diz-se absorvente se for impossível deixá-lo. Assim o estado i é absorvente se $p_{ii} = 1$ e $p_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Uma Cadeia de Markov é uma cadeia absorvente se: (1) existe pelo menos um estado absorvente; (2) é possível ir de um qualquer estado para pelo menos um estado absorvente, num número finito de passos.

Um estado que não seja absorvente numa Cadeia de Markov absorvente é denominado transiente. Os estados absorventes revelar-se-ão muito importantes no trabalho.

3.1.2. Cadeias de Markov em tempo contínuo

Em tempo discreto o intervalo de tempo entre transições é uma unidade de tempo. Esta noção perde-se em tempo contínuo, pelo que as Cadeias de Markov em tempo contínuo são uma generalização das cadeias em tempo discreto.

Seja $T = [0, +\infty)$ e $(X_t)_{t \in T}$ um processo estocástico que satisfaz a propriedade de Markov em tempo contínuo, $P[X_{t+s} = i | X_u, 0 \leq u \leq s] = P[X_{t+s} = i | X_s]$. Então X_t é uma Cadeia de Markov em tempo contínuo.

As probabilidades de transição são dadas por $P[X_{t+s} = i | X_s] = p_{ij}(s, s + t)$.

Como anteriormente, se a Cadeia for homogénea as probabilidades não dependerão de s e podem ser representadas por $p_{ij}(t)$. Logo, é possível criar uma matriz de transição $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,L}$. Por conveniência, e sem qualquer perda de generalidade, considera-se $P(0) = I$.

De acordo com Kijima (1997) consegue calcular-se a derivada à direita de P no ponto $t = 0$, seja $Q = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t) - I}{t}$. A matriz Q é o chamado gerador infinitesimal de uma Cadeia de Markov em tempo contínuo. Este gerador tem as seguintes propriedades:

$$q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j; \quad q_{ii} \leq 0; \quad -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad \forall i, j \in E.$$

Com o gerador infinitesimal é possível obter a matriz $P(t)$ porque esta é a solução das equações diferenciais:

$$\begin{aligned} dP(t) &= QP(t)dt, & t \geq 0 \\ dP(t) &= P(t)Qdt, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $P(0) = I$, a única solução das equações diferenciais é:

$$P(t) = \exp(tQ) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Pode agora surgir a questão da utilidade de considerar Cadeias de Markov em tempo discreto, visto que obtendo o gerador infinitesimal é possível criar uma matriz de transição em tempo contínuo. O problema está precisamente na determinação do gerador. Para uma correta estimação deste seria necessário que os dados recolhidos fossem também em tempo contínuo, algo que raramente é possível.

Portanto, dada uma matriz P em tempo discreto, é possível encontrar um gerador infinitesimal correspondente? A resposta a esta questão é afirmativa, mas existem alguns problemas, que serão abordados de seguida.

3.2 O problema das Matrizes Embutíveis

O gerador infinitesimal Q não existe para toda a matriz P . Este é o chamado problema das matrizes embutíveis (ver Inamura (2006)): nem todas as matrizes de transição em tempo discreto têm um correspondente gerador infinitesimal e, existindo, este pode não ser único ou não cumprir com as restrições impostas aos geradores. Israel *et al.* (2001) fornecem condições sobre a existência e unicidade destes.

O problema é bastante comum, e também surgiu na estimação das matrizes deste trabalho, o que obrigou a utilizar três métodos para a estimação da matriz infinitesimal e depois um quarto, para melhorar os resultados.

3.2.1 Ajuste Diagonal e Ajuste por Pesos

São métodos propostos por Israel *et al.* (2001). Inicialmente considera-se que o gerador é igual ao logaritmo da matriz de transição:

$$Q = \log(P) = (P - I) - \frac{(P - I)^2}{2} + \frac{(P - I)^3}{3} - \frac{(P - I)^4}{4} + \dots,$$

onde I é a matriz identidade, e se considera o desenvolvimento em série de Taylor. No entanto, o logaritmo da matriz de transição não é obrigatoriamente um gerador válido. Quando isso acontece, Israel *et al.* (2001) propõem dois métodos para o cálculo do gerador. O primeiro método é o “Ajuste Diagonal”, que consiste em igualar a zero todos os elementos fora da diagonal principal que sejam negativos e de seguida igualar o elemento da diagonal principal de cada linha ao simétrico da soma dos restantes elementos dessa linha. Simbolicamente, representando por q_{ij} um elemento do logaritmo da matriz de transição, o correspondente valor ajustado é:

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ e } q_{ij} < 0 \\ q_{ij}, & \text{caso contrário} \end{cases}; \quad \tilde{q}_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \tilde{q}_{ij}, \quad i = 1, \dots, L.$$

O método de “Ajuste por Pesos” é semelhante ao anterior. Começa-se por anular todos os elementos fora da diagonal principal. De seguida reajustam-se os elementos de cada linha, até os que já foram alterados, para que a soma da linha seja zero. Quer dizer:

$$\tilde{q}_{ij} = \tilde{q}_{ij} - |\tilde{q}_{ij}| \frac{\sum_{j=1}^L \tilde{q}_{ij}}{\sum_{j=1}^L |\tilde{q}_{ij}|} \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, L$$

3.2.2 Método de Quasi-Otimização

Considere-se agora o conjunto de todos os geradores possíveis,

$$\mathcal{H} = \left\{ Q \in \mathcal{M}_{L \times L} \left| \sum_{j=1}^L q_{ij} = 0, \quad q_{ij} \geq 0, i \neq j, i = 1, 2, \dots, L \right. \right\}.$$

O problema a resolver é encontrar $Q^* \in \mathcal{H}$ que minimize $\|\exp(Q^*) - P\|$. Este problema não é de fácil resolução mas é equivalente a minimizar $\|Q^* - \log(P)\|$ que, não sendo também de fácil resolução, foi tratado por Kreinin & Sidelnikova (2001).

Estes autores conceberam um algoritmo, baseado em Tuentter (2001), capaz de resolver o problema, linha a linha.

Seja $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_L)$ uma linha de $Q \in \mathcal{H}$ e permute-se esta de modo que z_1 seja o elemento da diagonal. O conjunto de soluções possíveis para o problema em causa é

$$\mathcal{C}(L) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L z_i = 0, z_1 \leq 0, z_i \geq 0 \text{ para } i \geq 2 \right\}.$$

Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_L)$ uma linha de $\log(P)$. Pretendendo-se que \mathbf{a} e \mathbf{z} sejam o mais próximos possíveis, o problema terá a seguinte formulação: $\min_{\mathbf{z} \in \mathcal{C}(L)} \sum_{i=1}^L (a_i - z_i)^2$.

Recorrendo então ao algoritmo proposto em Kreinin & Sidelnikova (2001), tem-se:

- 1 Se $\mathbf{a} \in \mathcal{C}(L)$, então $\mathbf{z} = \mathbf{a}$.
- 2 Caso contrário, construir $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_L)$, onde $b_i = a_i - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L a_i$.
- 3 Seja $\pi(\cdot)$ o operador que ordena as componentes de \mathbf{b} por ordem crescente e seja $\tilde{\mathbf{a}} = \pi(\mathbf{b})$.
- 4 Determinar m^* , o menor valor de m : $2 \leq m \leq L - 1$, a satisfazer a condição

$$(L - m + 1)\tilde{a}_{m+1} - \left(\tilde{a}_1 + \sum_{i=0}^{L-m-1} \tilde{a}_{L-i} \right) \geq 0.$$

- 5 Construir um vetor $\mathbf{z}^* \in \mathcal{C}(K)$ da seguinte forma

$$z_i^* = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \leq i \leq m^* \\ \tilde{a}_i - \frac{1}{L - m^* + 1} \left(\tilde{a}_1 + \sum_{j=m^*+1}^L \tilde{a}_j \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- 6 Calcular $\pi^{-1}(\mathbf{z}^*)$, que será a solução do problema, ou seja, uma linha da matriz geradora. Basta repetir o processo $L - 1$ vezes, para as restantes linhas, e o gerador fica determinado.

3.2.3 Otimização Componente a Componente

É o método que permite melhorar os resultados obtidos com a aplicação dos métodos anteriores. Baseia-se em Stoian & Balan (2012) e consiste, como o nome indica, em otimizar a matriz geradora elemento a elemento, exceto os elementos da diagonal principal. Tomam-se, para isso, todos os elementos da matriz geradora Q , tendo sempre em conta as restrições a que a matriz Q está sujeita. O algoritmo é trivial:

1. Encontrar uma matriz geradora Q , com algum dos métodos vistos.
2. Determinar \hat{q}_{ij} tal que $\hat{q}_{ij} = \min_{q_{ij}} \left\| \exp(Q(q_{ij})) - P \right\|$, para $i \neq j$, ajustando sempre as linhas da matriz geradora, de modo a satisfazer todas as restrições.

Este algoritmo não converge obrigatoriamente para a solução ótima, mas o resultado obtido será sempre uma melhoria em relação à matriz geradora inicial.

3.2.4 Obtenção de um gerador único para várias matrizes de transição

Todos os métodos anteriores, dada uma matriz de transição P em tempo discreto, encontram um gerador infinitesimal Q correspondente. Considere-se, no entanto, a seguinte situação: Dadas n matrizes de transição P_i , para diferentes períodos $i = 1, \dots, n$ (para este trabalho considera-se anos), e os correspondentes geradores infinitesimais Q_i , como encontrar um único gerador infinitesimal, que se aproxime o mais possível, nos diferentes períodos, das matrizes de transição?

A resposta a esta questão propõe um método muito semelhante ao método introduzido anteriormente, considerando Stoian & Balan (2012). Em primeiro lugar é necessário estimar um único gerador infinitesimal, por exemplo, a média dos geradores já conhecidos; de seguida, para cada matriz de transição associada a cada período,

minimiza-se a distância relativamente à exponencial do gerador encontrado. Para implementar esta ideia é necessário que a função a minimizar seja a distância das matrizes mencionadas anteriormente. Assim, o problema em questão pode ser resolvido do seguinte modo:

1. Dados n geradores infinitesimais, calcular $\hat{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i$.
2. Usar o método de otimização elemento a elemento com as modificações atrás referidas:

$$q_{ij} = \min_{\hat{q}_{ij}} \sum_{i=1}^n \left\| \exp \left(t \hat{Q}(\hat{q}_{ij}) \right) - P_i \right\|, i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, n.$$

4. A Base de Dados

Para a realização deste trabalho, numa primeira fase, foi fornecida uma base de dados com todos os contratos que entraram em incumprimento, de 2003 a 2011, numa instituição financeira. São 587.592 contratos e cada contrato é caracterizado por 159 campos. Tendo sido decidido que o estudo apenas incide sobre o crédito à habitação, a base de dados reduziu-se ao segmento dos contratos de crédito habitação. Esta nova base de dados é constituída por 102.354 contratos e por 5 campos:

- **Account_id** – Chave que identifica cada contrato (é importante referir que um cliente que resolve a sua situação de incumprimento, recebe uma nova chave, se voltar a falhar os pagamentos).
- **Ano** – Ano em que o contrato entrou em incumprimento.
- **Anoenc** – Ano em que o processo de recuperação do contrato terminou, este campo pode não ter valores.
- **branchFinal** – Estado em que o contrato encerrou, ou a indicação de que se mantém no processo de recuperação.
- **EAD** – Contém a EAD de cada contrato.

A opção de apenas serem considerados os anos de incumprimento é justificada pelo facto de a instituição financeira que forneceu os dados também o fazer. Logo, para que os resultados fossem comparáveis e úteis, utilizaram-se os mesmos pressupostos.

O campo **branchFinal** pode tomar valores entre 1 a 8, com os seguintes significados:

1 – Contratos Curados (sem ano contencioso); 2 – Contratos Reestruturados (sem ano contencioso); 3 – Curados (com ano contencioso); 4 – Reestruturados (com ano contencioso); 5 – Liquidados (com ano contencioso); 6 – Liquidados (sem ano contencioso); 7 – Vendas; 8 – Incompletos.

Após o incumprimento de um cliente, o seu contrato estará num destes ramos. O processo que o contrato de um cliente segue é observado na figura seguinte:

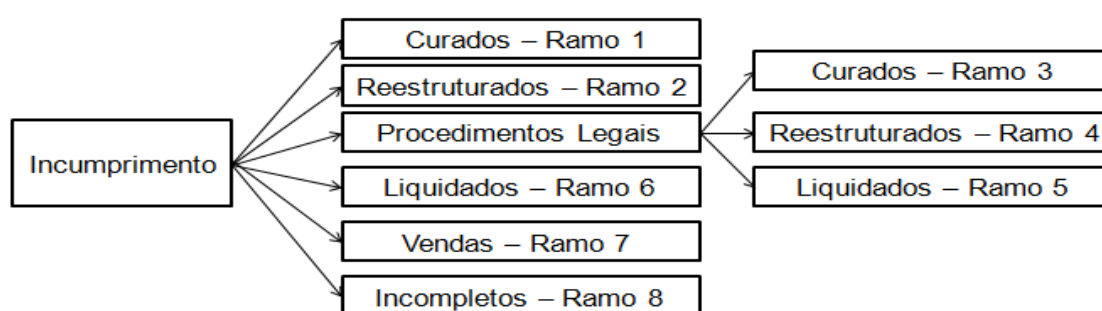


Figura 2 – Representação dos ramos

Na Tabela I, abaixo, é apresentada a distribuição dos contratos por ano, tendo em conta o ramo onde se encontram. Também é apresentado a soma da EAD (€) para cada ano.

Ano	Ramos								EAD
	1	2	3	4	5	6	7	8	
2003	5.745	327	245	185	756	1.670	238	70	442.721.160,51
2004	4.455	647	365	159	934	1.835	362	357	427.217.238,84
2005	2.845	904	314	129	1.015	1.698	418	777	414.210.789,68
2006	2.830	1.241	249	123	1.353	1.797	150	1.325	464.582.427,21
2007	3.892	1.279	274	162	2.020	1.862	15	2.484	645.551.939,60
2008	4.640	1.435	373	200	1.643	1.551	5	4.827	921.520.904,51
2009	3.206	1.196	499	173	744	896	0	4.844	729.344.333,21
2010	5.162	1.213	576	129	58	196	0	6.774	822.408.797,76
2011	1.556	456	116	23	5	115	0	12.237	900.228.245,12

Tabela I – Distribuição dos contratos por anos e ramos

Para os primeiros anos existe um maior número de contratos nos ramos 1 a 7, como seria de esperar. Por exemplo, para o ano 2011 só se encontra disponível a informação do ano. Completar a informação destes anos incompletos com as Cadeias de Markov é o

objetivo do trabalho e, assim, apresentar estimativas para a distribuição futura dos contratos pelos diversos ramos. Faltam apenas introduzir alguns conceitos chave que serão usados com frequência nas secções seguintes. Sempre que for referido o termo “ano” é o ano em que um contrato entrou em incumprimento. Por “período+n”, com $n = 0, 1, \dots$, entenda-se por mais n anos, relativamente ao ano de incumprimento; por exemplo, considerando o ano 2003 e o período +0, este período refere-se a 2003. Com o mesmo ano e o período +1 será uma referência a 2004, e assim sucessivamente.

À medida que o ano dos contratos fica mais próximo do presente a informação sobre o comportamento daqueles nos anos a seguir ao incumprimento é cada vez menor, como se procura ilustrar nas figuras abaixo:

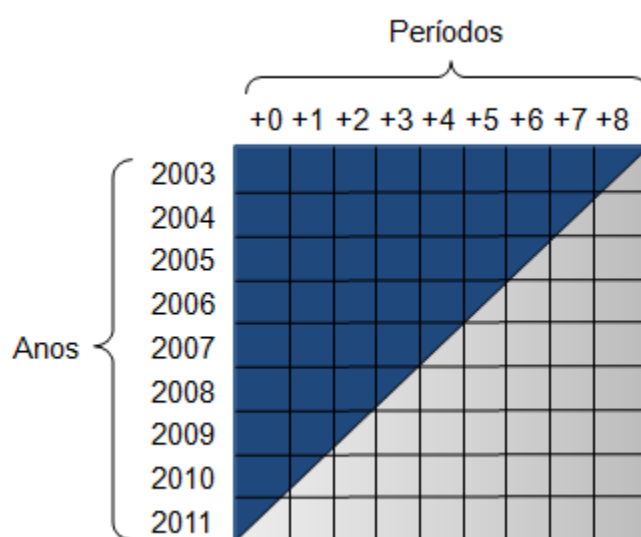


Figura 3 – Dados conhecidos e dados desconhecidos

Azul representa a informação conhecida e cinzento representa a informação desconhecida.

Ou, observando a informação período a período:

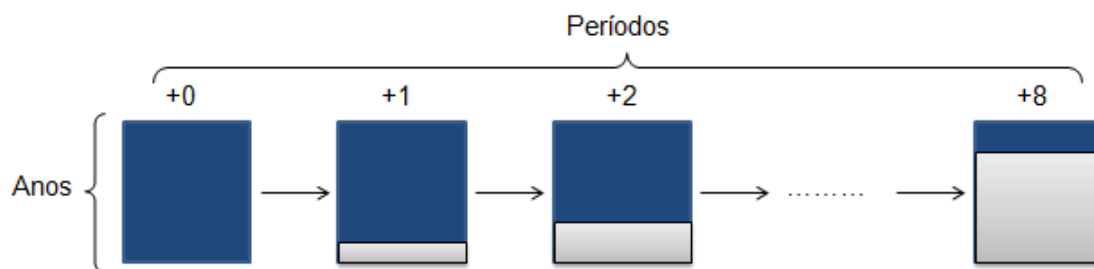


Figura 4 – Dados conhecidos e desconhecidos, período a período

Em cada período está a distribuição dos contratos por ramos, separados através dos anos de incumprimento. Para o período +0 existe informação para todos os anos mas por exemplo, para o período +7 só existe informação disponível para os contratos iniciados em 2003 e 2004. Por fim, é importante referir que todos os cálculos de probabilidades foram realizados usando a EAD dos contratos, em vez do número. Esta decisão faz parte da metodologia usada na instituição financeira que forneceu os dados.

Para a segunda fase do trabalho, foi fornecida uma base de dados com a informação de contratos em incumprimento entre os anos 2003 e 2010 que contém a informação da recuperação dos diversos clientes da instituição financeira. É importante referir que todos os contratos desta base de dados estão encerrados, ou seja, só existem perdas observadas para contratos cujo processo de recuperação terminou. Para retirar a informação necessária foram usados os seguintes campos:

- **Account_id** – Identifica cada contrato na base de dados.
- **Default_date** – Data de incumprimento de cada cliente.
- **CFDisc** – *Cash-flows* de cada cliente, já descontados à data de incumprimento e incorporando todos os custos da recuperação.
- **CFDate** – Data de receção de cada um dos *cash-flows*.
- **Branch_id** – Ramo em que o contrato encerrou.
- **Exposição** – A EAD de cada contrato.

É importante não esquecer que é impossível retirar qualquer informação sobre os contratos abertos desta segunda base de dados.

É por isso possível utilizar o método *workout* LGD para finalmente proceder ao cálculo deste indicador, o que será feito no próximo Capítulo.

5. Metodologia e Resultados

Neste capítulo será descrita a forma como o estudo foi conduzido e também os resultados que produziu. Numa primeira fase foram calculadas as probabilidades de um qualquer contrato estar em cada um dos ramos, sendo estas as categorias ou graus que o Acordo de Basileia II exige para o cálculo da LGD. De seguida, calculam-se as perdas. Recorde-se que o principal objetivo é apresentar, com recurso a Cadeias de Markov, uma possível solução para estimar o comportamento dos contratos por encerrar e estimar as perdas futuras.

O cálculo das probabilidades baseia-se na EAD dos contratos e o facto de se considerar os ramos como os estados da Cadeia de Markov fará com que os ramos de 1 a 7 sejam estados absorventes, complicando muito a construção de uma única matriz de transição.

O processo inicia-se pela construção de uma Cadeia de Markov com base nos dados observados; usando a cadeia construída, determinaram-se as matrizes de transição, para ser possível completar a informação em falta. Naturalmente, é necessário que a Cadeia de Markov que se pretende construir seja uma tradução do comportamento dos contratos abertos, ou seja, os contratos do ramo 8.

Os dados foram agrupados da seguinte forma: fixando um determinado ano, no fim do ano seguinte separam-se os contratos que fecharam nesse ano dos que continuam abertos e que prosseguem para o período a seguir; os que foram encerrados em períodos anteriores são excluídos do processo. Faz-se assim, ano após ano, até ao fim do horizonte em estudo.

Em cada período, a soma da EAD dos contratos de cada ramo é dividida pela soma da EAD de todos os contratos do período, obtendo-se um vetor de probabilidades. A Tabela XI, que se encontra em anexo, mostra a organização dos dados nesta forma.

Com os dados assim dispostos, os anos de incumprimento dos contratos são agrupados por período (juntam-se todos os anos considerando apenas os períodos), somando a EAD dos contratos para cada período. Por exemplo é somada a EAD de todos os contratos que pertençam ao período +1 e que sejam do ramo 1, e assim sucessivamente. Os resultados estão na tabela que se segue.

	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Todos os anos	+0	844.543.674,59	175.411.841,06	30.412.597,69	3.733.126,18	3.969.502,26	174.871.884,15	425.697,51	4.534.417.513,00
	+1	584.271.281,54	197.814.885,18	52.083.895,83	18.109.827,48	63.599.815,83	216.502.434,28	100.843,52	2.644.466.068,01
	+2	195.340.068,14	101.106.903,41	39.026.980,22	26.768.668,44	148.761.967,23	129.040.797,72	12.243.367,57	1.572.309.255,50
	+3	88.758.004,26	36.573.292,66	21.516.753,01	16.920.049,44	150.425.928,87	49.231.446,27	29.211.550,45	868.807.517,85
	+4	30.565.182,00	13.645.735,03	10.486.062,30	5.885.564,60	73.481.747,94	16.089.694,68	19.214.063,87	373.466.239,57
	+5	13.887.058,04	6.070.668,96	5.136.317,89	2.574.371,81	27.234.104,35	5.158.188,52	4.818.993,69	169.177.444,65
	+6	4.087.372,11	2.319.202,29	2.092.503,66	1.916.104,47	12.997.312,40	264.575,91	0,00	69.372.819,52
	+7	422.141,88	435.157,82	679.570,33	405.553,79	2.515.369,46	69.268,69	0,00	22.814.073,67
	+8	0,00	0,00	108.679,92	32.611,45	266.150,62	0,00	0,00	4.201.535,63

Tabela II – EAD dos contratos divididos por períodos

É possível passar das EADs a probabilidades, dividindo os elementos de cada período pela soma da EAD de cada linha. Vem:

	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Todos os anos	+0	0,1464242	0,0304123	0,0052728	0,0006472	0,0006882	0,0303187	0,0000738	0,7861626
	+1	0,1546940	0,0523743	0,0137899	0,0047948	0,0168389	0,0573220	0,0000267	0,7001593
	+2	0,0878092	0,0454495	0,0175434	0,0120330	0,0668714	0,0580063	0,0055036	0,7067835
	+3	0,0703622	0,0289932	0,0170572	0,0134132	0,1192489	0,0390278	0,0231572	0,6887402
	+4	0,0563067	0,0251379	0,0193172	0,0108423	0,1353668	0,0296402	0,0353958	0,6879931
	+5	0,0593319	0,0259367	0,0219447	0,0109989	0,1163566	0,0220382	0,0205890	0,7228040
	+6	0,0439267	0,0249243	0,0224880	0,0205922	0,1396811	0,0028434	0,0000000	0,7455443
	+7	0,0154398	0,0159159	0,0248552	0,0148331	0,0919995	0,0025335	0,0000000	0,8344230
	+8	0,0000000	0,0000000	0,0235800	0,0070756	0,0577461	0,0000000	0,0000000	0,9115982

Tabela III – Probabilidade dos contratos divididos por ramos

Os vetores da tabela anterior são vetores de probabilidades, associadas ao comportamento de uma população (dividida por estados, neste caso, os ramos) ao longo do tempo, considerando também que em cada período são contabilizados apenas os

contratos que chegam abertos. Em outras palavras, no estudo de cada período são considerados apenas aqueles contratos que ainda não foram encerrados. Consegue-se assim que os vetores não tenham “memória”, cumprindo as condições para uma Cadeia de Markov. Pode passar-se então ao cálculo das matrizes de transição em tempo discreto e, posteriormente, à determinação dos respectivos geradores infinitesimais.

Para calcular as matrizes de transição entre dois períodos consideram-se sempre dois períodos adjacentes. O problema a resolver é o seguinte: dado um vetor de probabilidades (da Cadeia de Markov) do período $n - 1$, qual é a matriz de transição P_n que, aplicada àquele vetor, fornece um vetor suficientemente próximo do vetor do período n ?

Quer dizer: com X_{n-1} e X_n conhecidos, qual a matriz P_n que minimiza a diferença $\|X_n^* - X_n\|$, $X_n^* = P_n \times X_{n-1}$, P_n a satisfazer as condições referidas no Capítulo das Cadeias de Markov e sendo $\|\cdot\|$ a distância euclidiana?

Este problema é resolvido utilizando a ferramenta *Solver*. Sendo ao todo nove períodos, foram calculadas oito matrizes de transição.

A estas oito matrizes de transição correspondem oito geradores infinitesimais, que é necessário obter. Tentou-se em primeiro lugar a solução mais simples, com o logaritmo das matrizes de transição, mas nenhuma cumpre os requisitos impostos aos geradores infinitesimais. Logo, impõe-se aplicar os quatro métodos atrás apresentados, pois está presente uma matriz embutível. Foi usado o *software* estatístico R.

Uma vez determinados os geradores infinitesimais, aplicou-se-lhes a função exponencial, para efeitos de comparação com as matrizes de transição originais. Obtiveram-se as distâncias da tabela seguinte, calculadas com a fórmula

$$\|P - \exp(Q)\| = \sum_{i,j} |(P)_{ij} - (\exp(Q))_{ij}|, i = 1, \dots, L \text{ e } j = 1, \dots, L.$$

	AD	APP	QO	CaC
P1	7,808946	6,444726	6,841487	2,636317
P2	4,984159	4,362739	4,940147	1,475618
P3	8,428161	7,667013	5,780441	2,557961
P4	3,687948	3,190201	3,601974	1,313215
P5	3,065150	2,104100	2,677716	1,117936
P6	8,733035	10,211380	9,030782	6,296911
P7	7,133841	5,991439	6,303643	2,825191
P8	3,869576	3,688798	3,640247	3,149686

Tabela IV – Distância entre os geradores e as matrizes de transição

Na tabela figuram as distâncias da exponencial dos geradores encontrados às matrizes de transição, onde AD é o método de Ajuste Diagonal, APP é o método de Ajuste por Pesos, QO é o método de Quasi-Otimização e CaC é a Otimização Componente a Componente, aplicada em cada caso à matriz com melhor resultado. Os erros parecem ser elevados, mas a distância entre matrizes é calculada entrada a entrada; como são matrizes oito por oito, há um total de 64 entradas por matriz, o que faz com que o erro de cada entrada seja, em média, bastante reduzido. Por exemplo, tomando a matriz P1, com o método Otimização Componente a Componente, o erro médio é dado por $\frac{2,636317}{64} = 0,041$.

Como se vê na coluna mais à direita, o método Componente a Componente proporcionou melhorias significativas. Como medida de controlo, às matrizes que apresentaram resultados piores nas distâncias foi também aplicada a Otimização Componente a Componente, mas o *ranking* manteve-se inalterado. Os resultados apresentados são os melhores obtidos e estão associados às matrizes que apresentaram menores distâncias.

Já foi salientado que o problema que se coloca, depois de conhecidas as oito matrizes de transição e os geradores respetivos, é obter um único gerador, capaz de produzir Cadeias de Markov até ao período +8, ou mesmo até períodos superiores a este. Aplicando o método então indicado, é possível criar uma única matriz infinitesimal. Na tabela seguinte, apresentam-se as distâncias do gerador infinitesimal único estimado às matrizes de transição:

	Distância
P1	4,4665
P2	4,9732
P3	4,8915
P4	4,6881
P5	4,8051
P6	5,689
P7	4,4479
P8	6,6044

Tabela V – Distância às matrizes de transição com um único gerador

É importante não esquecer que, para se fazer a comparação entre as matrizes de transição originais e as matrizes geradas pelo gerador único Q , é necessário fazer $\exp(1 \times Q)$ para P_1 , $\exp(2 \times Q)$ para P_2 , e assim sucessivamente.

A distância que a única matriz geradora produz para as matrizes de transição retiradas dos dados é superior às distâncias apresentadas na Tabela V, mas ao mesmo tempo oferece uma maior flexibilidade. No entanto o erro médio apresentado continua a ser bastante pequeno.

Com esta única matriz geradora é possível estimar a repartição dos contratos pelos diversos ramos, nos anos vindouros. A simulação das distribuições de contratos para os diferentes ramos, ao longo dos períodos, foi sempre feita com a ideia base de só considerar em cada período os contratos que aí chegam abertos.

As matrizes de transição iniciais, que depois deram origem ao gerador infinitesimal, foram calculadas com base neste raciocínio; portanto, fará todo o sentido estimar comportamentos futuros usando as distribuições obtidas. Os resultados da estimação até ao período +9 estão nas Tabelas XII e XIII, anexadas. Os vetores de probabilidades em cada ano, ao longo dos períodos, são as Cadeias de Markov estimadas.

É necessário ter algum cuidado com as estimações para períodos avançados, como o período +8, por exemplo, pois nestes períodos a quantidade de dados é extremamente reduzida, podendo não representar corretamente a população em causa. As estimações para períodos mais longínquos devem assim ser analisadas com um elevado sentido crítico.

As Tabelas XII e XIII apresentam para todos os anos o comportamento dos dados, desde o período +0 até ao período +9 usando o gerador construído para tempo contínuo. Nas Tabelas XIV e XV encontram-se os valores estimados até ao período +8, usando matrizes de transição em tempo discreto.

Uma observação mais atenta das probabilidades aí constantes permite concluir que não é fácil inferir muitas informações úteis. Estas probabilidades são probabilidades parciais. Por exemplo: dado o ano 2006, no período +5 qual é a percentagem de contratos que já encerraram no ramo 6? Para responder a estas questões e tornar o trabalho de estimação mais fácil de interpretar é necessário fazer uma pequena modificação.

A melhor forma para apresentar as probabilidades, de modo a serem analisadas diretamente, seria calculando probabilidades globais (usando todos os contratos). Quer dizer, em cada período, fixado o ano de partida, só se distribuem pelos diferentes ramos os contratos que aí chegam abertos, como é razoável; no entanto, seria agora mais útil

ter as probabilidades tomando também em consideração os contratos que foram sendo fechados ao longo dos períodos passados.

Felizmente, a partir de todos os cálculos realizados, é possível a conversão para probabilidades totais, para o que basta acumular os contratos que antes eram esquecidos.

Por outras palavras, em vez de em cada período só se considerar os contratos que chegaram abertos, considera-se também todos os contratos que foram fechados nos períodos anteriores. Só para ilustração, considere-se o ano 2006 e o vetor de probabilidades do período +0, retirado da Tabela XII:

	+0							
Ano	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	0,09155848	0,03051406	0,00200132	0,00014083	0,00126925	0,04529565	0,00000000	0,82922041

Tabela VI – Probabilidades parciais do ano 2006 para o período +0

Multiplicando este vetor pela EAD dos contratos de 2006 (464.582.427,21 euros), obtém-se a distribuição da EAD dos contratos, por ramo:

	+0							
Ano	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	42.536.462,42	14.176.295,11	929.779,40	65.426,50	589.669,30	21.043.562,04	0,00	385.241.232,44

Tabela VII – Distribuição da EAD dos contratos de 2006

Da Tabela XII também é possível obter o vetor de probabilidades para os contratos do ano 2006 que chegam abertos ao período +1:

	+1							
Ano	1	2	3	4	5	6	7	8
2006	0,09847241	0,04982897	0,00220283	0,00187071	0,00166644	0,08880914	0,00004013	0,75710936

Tabela VIII - Probabilidades parciais do ano 2006 para o período +1

O objetivo deste exemplo é ilustrar como se processa a transformação das probabilidades apresentadas no vetor anterior em probabilidades globais, isto é, que

incluam também a informação dos contratos encerrados no período +0. No período +0, existem ainda 385.241.232,44 euros em contratos abertos. Deste montante, no período +1, serão fechados (no primeiro ramo) 9,847241%. Mas, no período anterior, já foram encerrados contratos com um total de 42.536.462,42 euros da EAD. Para determinar a EAD dos contratos encerrados no ramo 1 até ao período +1 basta fazer: $0,09847241 \times 385.241.232,44 + 42.536.462,42$. O mesmo processo é repetido até ao ramo 7. Para o ramo 8 é semelhante, exceto que não se soma a EAD do período anterior. Por fim, para determinar as probabilidades, basta dividir os valores encontrados para todos os ramos pela EAD total do ano 2006.

Em anexo, nas Tabelas XVI e XVII encontram-se os resultados de todas as probabilidades acumuladas, para todos os anos, desde o período +0 até ao período +9. Nas Tabelas XVIII e XIX, em tempo discreto, até ao período +8. Como seria de esperar, ao aumentar o período a probabilidade de um contrato estar num ramo absorvente (ramos de 1 a 7) aumenta, enquanto a probabilidade de um contrato estar aberto diminui, pois à medida que o tempo passa os contratos serão fechados.

Mais ainda, observando o período +9, para qualquer ano, a probabilidade de um contrato ainda não ter fechado é muito pequena, comportamento também observável nas Figuras 6 a 13 anexas, onde as abcissas representam os períodos e as ordenadas as probabilidades para cada ramo. As probabilidades foram calculadas até ao período +9 mas podiam ser calculadas para qualquer período. Observa-se que, para qualquer ano, a percentagem de contratos dos ramos 1 a 7 aumenta de período em período, mas para o ramo 8 acontece o oposto. Este facto é intuitivo, mas também pode ser analisado de uma perspetiva formal: sendo as Cadeias de Markov construídas para cada ano cadeias absorventes, depois de um certo número de passos, toda a população irá convergir para os estados absorventes.

Obtidas as probabilidades, resta apenas calcular as perdas e conseguir associar estas às probabilidades calculadas. Na segunda base de dados, existem informações relativamente às recuperações ao longo do tempo de cada cliente, tornando possível utilizar o método *workout* para o cálculo da LGD. Numa primeira fase, os *cash-flows* foram agrupados de uma forma semelhante à que foi usada para agrupar os contratos no cálculo das probabilidades. Para cada ramo, fixou-se o ano de incumprimento e os *cash-flows* desses contratos foram agrupados pelos diferentes períodos, de uma maneira igual às probabilidades, isto é, para cada período somam-se todos os *cash-flows* correspondentes ao período.

No cálculo da LGD é necessário determinar a taxa de recuperação (que não é mais que o rácio entre o montante recuperado e a exposição). Uma vez que estão disponíveis todos os *cash-flows* dos clientes, é fácil descobrir os montantes recuperados, por período: dado um qualquer ano de incumprimento, basta somar os *cash-flows* correspondentes. Calculados os valores recuperados por período, determina-se de seguida o montante recuperado acumulado para todos os períodos. Determina-se então a taxa de recuperação e também a taxa de perdas, igual à sua complementar.

Com as probabilidades e as perdas já calculadas é possível, finalmente, chegar à LGD procurada e ao mesmo tempo apresentar a sua evolução ao longo do tempo. A partir das perdas acumuladas de cada período é feita uma média ponderada por EAD das taxas de perdas observadas, de forma a obter um único valor para as perdas por período e também para cada um dos ramos.

É necessário recorrer a um processo semelhante ao adotado para as probabilidades calculadas anteriormente. Para os anos de incumprimento usados nas perdas é feita uma média simples, de modo a ser obtido um único valor para as probabilidades por período,

o que se repete para todos os ramos. Multiplicando as perdas pelas probabilidades, é finalmente obtida a LGD, como mostra a seguinte tabela:

	Ramo 1		Ramo 2		Ramo 3		Ramo 4		Ramo 5		Ramo 6		Ramo 7		Ramo 8	
Período	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD	Loss Rate	LGD
+0	0,3799	0,0653	0,5758	0,0148	0,6151	0,0028	0,7648	0,0003	0,8996	0,0009	0,6929	0,0271	1,0201	0,0001	0,6830	0,5174
+1	0,1267	0,0368	0,2494	0,0157	0,3110	0,0045	0,4335	0,0017	0,6960	0,0092	0,4400	0,0391	0,8964	0,0002	0,6830	0,3594
+2	0,0535	0,0178	0,1237	0,0109	0,1854	0,0048	0,2355	0,0030	0,5501	0,0242	0,3611	0,0441	0,6574	0,0037	0,6830	0,2516
+3	0,0256	0,0091	0,0872	0,0087	0,1124	0,0039	0,1446	0,0030	0,4582	0,0375	0,3252	0,0452	0,5439	0,0106	0,6830	0,1698
+4	0,0164	0,0060	0,0719	0,0078	0,0758	0,0031	0,0950	0,0025	0,4068	0,0434	0,2309	0,0341	0,5246	0,0149	0,6830	0,1171
+5	0,0133	0,0050	0,0652	0,0074	0,0598	0,0028	0,0666	0,0021	0,3222	0,0386	0,1920	0,0295	0,4418	0,0140	0,6830	0,0826
+6	0,0128	0,0049	0,0636	0,0076	0,0581	0,0030	0,0638	0,0023	0,2537	0,0326	0,1781	0,0282	0,4300	0,0146	0,6830	0,0568
+7	0,0128	0,0049	0,0634	0,0078	0,0581	0,0033	0,0638	0,0026	0,2516	0,0336	0,1742	0,0283	0,4300	0,0159	0,6830	0,0366

Tabela IX – *Loss Rates* e LGD por ramos

Observando a Tabela IX, repara-se que a *loss rate* do ramo 8 é constante para todos os períodos. Este facto resulta de não ter sido fornecida qualquer informação sobre as perdas dos contratos ainda abertos, pelo que a solução encontrada foi usar o valor final para o período +5, divulgado pela instituição financeira, como o valor constante das perdas para todos os períodos. Somando as LGDs de cada ramo, obtém-se a LGD total por período, o que permite a análise da evolução da LGD ao longo do tempo.

Períodos	LGD
+0	0,628602
+1	0,466529
+2	0,360064
+3	0,287759
+4	0,229021
+5	0,182097
+6	0,149923
+7	0,132969

Tabela X – LGD por períodos

Como seria de esperar, a LGD para períodos iniciais é bastante alta, mas observa-se que à medida que o número de períodos aumenta a LGD irá diminuir, um facto que corresponde à intuição, pois à medida que o tempo passa serão fechados mais contratos e serão feitas mais recuperações. A estimativa para a LGD utilizada pela instituição é ligeiramente superior à que se obteve neste trabalho (18,21%), note-se que a instituição

utiliza o valor do período +5. Caso seja utilizado o valor presente neste trabalho, para o mesmo período, isso irá implicar uma diminuição dos requisitos de fundos próprios.

É também possível verificar que, ao aumentar o número de períodos para o cálculo da LGD, a estimativa desta diminui, reforçando o princípio de que as instituições financeiras devem usar um conjunto de dados o mais alargado possível.

6. Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo para o cálculo da LGD de uma carteira de crédito à habitação, com recurso a Cadeias de Markov. Todo o processo foi ilustrado e suportado com o recurso a uma base de dados real de uma instituição financeira portuguesa.

No cálculo da LGD é necessário determinar as perdas e, ao mesmo tempo, as probabilidades que se devem associar às diferentes categorias de risco, que para este trabalho são os ramos.

No cálculo das perdas foi usado o método *workout* LGD, apresentado em BCBS (2005b), e não foi necessário recorrer às Cadeias de Markov, visto que se consegue calcular a LGD apenas com os dados fornecidos. Para o cálculo das probabilidades dos ramos é que já foi indispensável desenvolver o modelo com Cadeias de Markov, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto, de modo a prever o comportamento futuro dos contratos abertos.

Em tempo discreto é possível fazer a previsão até ao período +8, e esta é até mais precisa, pois são usadas as matrizes de transição retiradas dos dados, e não o gerador infinitesimal. Porém, em tempo discreto todo o modelo é muito rígido. Se, por exemplo, for necessário considerar o período +9, ou algum momento intermédio, já não se obtém uma resposta.

Assim sendo, foi implementado também o modelo em tempo contínuo, que é muito mais flexível e já resolve o problema, sendo possível calcular os valores das probabilidades para qualquer período desejado. Naturalmente, tanto em tempo discreto como em tempo contínuo, os resultados fornecidos pelos modelos devem ser razoáveis, indo ao encontro do que é legítimo esperar. O primeiro e principal critério de validação é verificar que a probabilidade de um contrato estar fechado aumentará, à medida que o tempo passa.

Para o período de cálculo da LGD, o período +5, as médias das probabilidades estimadas a partir das probabilidades globais foram: 35,72% em tempo contínuo (37,82% em tempo discreto) para o ramo 1; 11,63% para o ramo 2 (10,99%); 5,33% para o ramo 3 (3,71%); 3,85% para o ramo 4 (1,96%); 11,89% para o ramo 5 (14,64%); 14,79% para o ramo 6 (14,43%); 4,18% para o ramo 7 (2,57%); e, por fim, 12,62% para o ramo 8 (14,38%).

As baixas probabilidades de contratos tanto no ramo 1 como no ramo 2 causaram algum alarme, visto serem os ramos que apresentam menores taxas de perdas. Porém, a atual conjuntura económica explica esta situação, dado que cada vez são menos os casos de incumprimento no crédito à habitação que encontram uma resolução pacífica.

De modo semelhante, e porque os resultados das probabilidades podem ser estendidos à LGD, como visto no capítulo anterior, à medida que o número de períodos aumenta a LGD irá diminuir. Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se utilizar um maior número de anos, de modo a obter valores da LGD inferiores aos obtidos no presente estudo. Os resultados produzidos pelo modelo e presentes neste trabalho claramente respeitam este critério, podendo considerar-se muito satisfatórios.

Para estudos futuros, seria interessante calcular também o *downturn* LGD, encontrando algum fator de *stress*, de modo a obter previsões da LGD mais conservadoras. Outro problema em aberto é a conceção de um método de cálculo para as perdas do ramo 8, uma vez que neste trabalho foram usadas as estimativas da própria instituição. Embora evidente, é importante realçar que a utilização de mais dados (entenda-se um maior número de anos) irá ter uma grande influência e tornar mais robusta a estimativa final da LGD.

Entende-se que foi desenvolvido um bom modelo para o cálculo da LGD, capaz de produzir resultados utilizáveis e que pode ser estendido a outras carteiras para além do crédito à habitação. É verdade que não consegue resolver todos os problemas do cálculo deste indicador, mas é um passo em frente na sua estimação, que é importante para as instituições financeiras.

Referências Bibliográficas

Banco de Portugal. (2007). *Aviso N.º 5/2007*. Banco de Portugal, Lisboa.

Basel Committee on Banking Supervision (2005a). *An Explanatory Note on Basel II IRB Risk Weight Functions*. BCBS, Basel.

Basel Committee on Banking Supervision (2005b). *Working Paper no.14: Studies on the Internal Rating Systems*. BCBS, Basel.

Basel Committee on Banking Supervision (2006). *Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version*. BCBS, Basel.

Bielecki T., Rutkowski M. (2010). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer Finance.

Chalupka R., Kopecsni J. (2008). Modelling Bank Loan LGD of Corporate and SME Segments: A case study. *Czech Journal of Economics and Finance*, **59**(4), 360-382.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 3rd edition, volumes I & II. John Wiley & Sons, New York.

Frye, J. (2000). Depressing Recoveries. *Risk* **13**(11), 106-111.

Hui, L. (2010). Downturn LGD: A Spot Recovery Approach. MPRA Paper 2010.

Inamura, Y. (2006). Estimating continuous time transition matrices from discretely observed data. Working paper, Bank of Japan.

Israel, R. B., Rosenthal, J. S., Wei, J. Z. (2001). Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings. *Mathematical Finance*, **11**(2), 245–265.

Kijima, M. (1997). *Markov Processes for Stochastic Modeling*. Stochastic Modeling Series, Chapman & Hall/CRC Press, London.

Kreinin, A., Sidelnikova M. (2001). Regularization algorithms for transition matrices. *Algo. Research Quarterly* **4**(1/2), 25-40.

Merton (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, **29**(2), 449-470

Ozdemir B., Miu P. (2008). *Basel II Implementation: A guide to developing and validating a compliant internal risk system*. McGraw-Hill.

Norris, J. (1998). *Markov Chains*. Cambridge University Press.

Resnick, S. (2002). *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser.

Stoian N., Balan M. (2012). Stochastic Models for Credit Risk. *Internal Auditing & Risk Management*, **1**(26), 35-44.

Tuenter, H. J. H. (2001). The minimum L2-distance projection onto the canonical simplex: A simple algorithm. *Algo. Research Quarterly* **4**(4), 53–55.

Vasicek, O. (1987). The Distribution of Loan Portfolio Value. Working Paper. KMV Corporation.

Witzany, J. (2011). A two factor model for PD and LGD. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, The Czech Econometric Society, **18**(28).

ANEXO A - Dedução do Capital Regulatório

No texto (Capítulo 2) aparece a equação (1) abaixo

$$K = \left(LGD \times N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right] - PD \times LGD \right) \times f(PD, M), \quad (1)$$

Vai agora mostrar-se como surge o factor

$$N \left[\sqrt{\frac{1}{1-R}} \times G(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \times G(0,999) \right],$$

único que não é de dedução imediata, e que surgiu inicialmente em Vasicek (1987).

Seja Y a taxa de variação no retorno de um dado credor, para um ano. Esta taxa é dada pela expressão:

$$Y = \sqrt{R} \cdot e + \sqrt{1-R} \cdot w,$$

onde e e w são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Normal *Standard*. A variável aleatória e representa o factor de risco considerado e w é uma componente estocástica própria do credor Y . O termo \sqrt{R} é o peso do risco que o credor tem no factor e . Considerando o modelo de Merton para os incumprimentos, cf. Merton (1974), o incumprimento do credor irá ocorrer quando a sua taxa de retorno estiver abaixo de um determinado nível α ; então, a probabilidade de incumprimento para este credor pode ser escrita da seguinte forma:

$$PD = P[Y < \alpha] \Leftrightarrow \alpha = N^{-1}[PD] = G[PD]$$

Admitindo que se sabe ser $e = u$, é possível calcular a probabilidade de incumprimento condicional, seja

$$P[Y < \alpha | e = u] = P[\sqrt{R} \cdot e + \sqrt{1-R} \cdot w < \alpha | e = u] = P\left[w < \frac{\alpha - \sqrt{R} \cdot e}{\sqrt{1-R}} | e = u\right].$$

Atendendo a que $e = u$, w é uma variável aleatória Normal Standard e $\alpha = G[PD]$, a igualdade anterior vem

$$P[Y < \alpha | e = u] = N\left[\frac{G[PD] - \sqrt{R} \cdot u}{\sqrt{1-R}}\right]$$

Esta expressão é análoga à que aparece em (1), bastando fixar u de forma que $-u = G(0,999)$ para se obter o factor em causa.

ANEXO B – Alguns Resultados

Anos	Período	Porcentagem							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2003	+0	0,3463	0,0061	0,0055	0,0000	0,0003	0,0580	0,0000	0,5837
	+1	0,4223	0,0220	0,0162	0,0046	0,0081	0,0739	0,0000	0,4530
	+2	0,0380	0,0549	0,0159	0,0417	0,1257	0,1606	0,0000	0,5632
	+3	0,0359	0,0270	0,0323	0,0254	0,1994	0,0994	0,0129	0,5677
	+4	0,0205	0,0183	0,0126	0,0216	0,1103	0,0754	0,2116	0,5297
	+5	0,0227	0,0057	0,0195	0,0063	0,1599	0,0496	0,2431	0,4932
	+6	0,0176	0,0000	0,0239	0,0047	0,1868	0,0016	0,0000	0,7653
	+7	0,0454	0,0000	0,0252	0,0143	0,2992	0,0000	0,0000	0,6159
	+8	0,0000	0,0000	0,0236	0,0071	0,0577	0,0000	0,0000	0,9116
2004	+0	0,3197	0,0119	0,0045	0,0006	0,0013	0,0503	0,0000	0,6117
	+1	0,1242	0,0401	0,0191	0,0074	0,0197	0,1176	0,0000	0,6720
	+2	0,0749	0,0519	0,0298	0,0153	0,0537	0,0944	0,0003	0,6798
	+3	0,0451	0,0331	0,0150	0,0126	0,0924	0,0753	0,0790	0,6475
	+4	0,0338	0,0212	0,0135	0,0053	0,1118	0,0494	0,1461	0,6189
	+5	0,0671	0,0190	0,0323	0,0140	0,0605	0,0346	0,0000	0,7724
	+6	0,0931	0,0463	0,0269	0,0343	0,2582	0,0036	0,0000	0,5374
	+7	0,0041	0,0219	0,0247	0,0151	0,0139	0,0035	0,0000	0,9168
2005	+0	0,1573	0,0221	0,0051	0,0008	0,0035	0,0524	0,0001	0,7589
	+1	0,1095	0,0412	0,0075	0,0059	0,0155	0,0864	0,0000	0,7339
	+2	0,0852	0,0484	0,0099	0,0049	0,0319	0,0734	0,0164	0,7299
	+3	0,0514	0,0249	0,0120	0,0112	0,0636	0,0781	0,1117	0,6470
	+4	0,0805	0,0201	0,0282	0,0058	0,0753	0,0150	0,0000	0,7752
	+5	0,1102	0,0446	0,0273	0,0111	0,2328	0,0255	0,0000	0,5485
	+6	0,0102	0,0131	0,0186	0,0130	0,0352	0,0025	0,0000	0,9074
2006	+0	0,0916	0,0305	0,0020	0,0001	0,0013	0,0453	0,0000	0,8292
	+1	0,0985	0,0498	0,0022	0,0019	0,0017	0,0888	0,0000	0,7571
	+2	0,0601	0,0509	0,0095	0,0036	0,0322	0,0770	0,0288	0,7380
	+3	0,0928	0,0270	0,0154	0,0059	0,0589	0,0248	0,0000	0,7752
	+4	0,0962	0,0352	0,0159	0,0176	0,3017	0,0423	0,0000	0,4910
	+5	0,0112	0,0156	0,0110	0,0103	0,0184	0,0044	0,0000	0,9291
2007	+0	0,0792	0,0225	0,0003	0,0000	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,0854	0,0444	0,0017	0,0007	0,0032	0,0831	0,0002	0,7813
	+2	0,1171	0,0318	0,0111	0,0071	0,0276	0,0413	0,0000	0,7639
	+3	0,1297	0,0364	0,0178	0,0171	0,2950	0,0400	0,0000	0,4640
	+4	0,0154	0,0215	0,0212	0,0072	0,0142	0,0049	0,0000	0,9155
2008	+0	0,0684	0,0439	0,0008	0,0001	0,0008	0,0320	0,0000	0,8540
	+1	0,1400	0,0534	0,0082	0,0018	0,0082	0,0323	0,0000	0,7560
	+2	0,1193	0,0411	0,0138	0,0114	0,1507	0,0515	0,0000	0,6123
	+3	0,0269	0,0244	0,0176	0,0136	0,0166	0,0057	0,0003	0,8948
2009	+0	0,1631	0,0464	0,0025	0,0000	0,0001	0,0267	0,0000	0,7613
	+1	0,1139	0,0451	0,0222	0,0068	0,0716	0,0471	0,0000	0,6934
	+2	0,0501	0,0557	0,0361	0,0187	0,0166	0,0153	0,0000	0,8075
2010	+0	0,1488	0,0219	0,0161	0,0014	0,0002	0,0023	0,0000	0,8093
	+1	0,2254	0,0872	0,0300	0,0102	0,0043	0,0120	0,0000	0,6309
2011	+0	0,1016	0,0418	0,0079	0,0020	0,0001	0,0053	0,0000	0,8414

Tabela XI – Distribuição das probabilidades parciais conhecidas

Anos	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2003	+0	0,3463	0,0061	0,0055	0,0000	0,0003	0,0580	0,0000	0,5837
	+1	0,4223	0,0220	0,0162	0,0046	0,0081	0,0739	0,0000	0,4530
	+2	0,0380	0,0549	0,0159	0,0417	0,1257	0,1606	0,0000	0,5632
	+3	0,0359	0,0270	0,0323	0,0254	0,1994	0,0994	0,0129	0,5677
	+4	0,0205	0,0183	0,0126	0,0216	0,1103	0,0754	0,2116	0,5297
	+5	0,0227	0,0057	0,0195	0,0063	0,1599	0,0496	0,2431	0,4932
	+6	0,0176	0,0000	0,0239	0,0047	0,1868	0,0016	0,0000	0,7653
	+7	0,0454	0,0000	0,0252	0,0143	0,2992	0,0000	0,0000	0,6159
	+8	0,0000	0,0000	0,0236	0,0071	0,0577	0,0000	0,0000	0,9116
	+9	0,0303	0,0305	0,0304	0,0302	0,0363	0,0311	0,0305	0,7807
2004	+0	0,3197	0,0119	0,0045	0,0006	0,0013	0,0503	0,0000	0,6117
	+1	0,1242	0,0401	0,0191	0,0074	0,0197	0,1176	0,0000	0,6720
	+2	0,0749	0,0519	0,0298	0,0153	0,0537	0,0944	0,0003	0,6798
	+3	0,0451	0,0331	0,0150	0,0126	0,0924	0,0753	0,0790	0,6475
	+4	0,0338	0,0212	0,0135	0,0053	0,1118	0,0494	0,1461	0,6189
	+5	0,0671	0,0190	0,0323	0,0140	0,0605	0,0346	0,0000	0,7724
	+6	0,0931	0,0463	0,0269	0,0343	0,2582	0,0036	0,0000	0,5374
	+7	0,0041	0,0219	0,0247	0,0151	0,0139	0,0035	0,0000	0,9168
	+8	0,0321	0,0324	0,0323	0,0320	0,0380	0,0329	0,0324	0,7679
	+9	0,0519	0,0521	0,0521	0,0519	0,0566	0,0526	0,0521	0,6307
2005	+0	0,1573	0,0221	0,0051	0,0008	0,0035	0,0524	0,0001	0,7589
	+1	0,1095	0,0412	0,0075	0,0059	0,0155	0,0864	0,0000	0,7339
	+2	0,0852	0,0484	0,0099	0,0049	0,0319	0,0734	0,0164	0,7299
	+3	0,0514	0,0249	0,0120	0,0112	0,0636	0,0781	0,1117	0,6470
	+4	0,0805	0,0201	0,0282	0,0058	0,0753	0,0150	0,0000	0,7752
	+5	0,1102	0,0446	0,0273	0,0111	0,2328	0,0255	0,0000	0,5485
	+6	0,0102	0,0131	0,0186	0,0130	0,0352	0,0025	0,0000	0,9074
	+7	0,0286	0,0289	0,0287	0,0285	0,0347	0,0294	0,0288	0,7924
	+8	0,0471	0,0473	0,0473	0,0471	0,0520	0,0478	0,0473	0,6640
	+9	0,0637	0,0639	0,0638	0,0636	0,0676	0,0642	0,0639	0,5493
2006	+0	0,0916	0,0305	0,0020	0,0001	0,0013	0,0453	0,0000	0,8292
	+1	0,0985	0,0498	0,0022	0,0019	0,0017	0,0888	0,0000	0,7571
	+2	0,0601	0,0509	0,0095	0,0036	0,0322	0,0770	0,0288	0,7380
	+3	0,0928	0,0270	0,0154	0,0059	0,0589	0,0248	0,0000	0,7752
	+4	0,0962	0,0352	0,0159	0,0176	0,3017	0,0423	0,0000	0,4910
	+5	0,0112	0,0156	0,0110	0,0103	0,0184	0,0044	0,0000	0,9291
	+6	0,0253	0,0256	0,0254	0,0252	0,0316	0,0261	0,0255	0,8153
	+7	0,0423	0,0425	0,0424	0,0422	0,0475	0,0430	0,0425	0,6975
	+8	0,0582	0,0583	0,0583	0,0581	0,0624	0,0587	0,0583	0,5877
	+9	0,0724	0,0725	0,0724	0,0723	0,0757	0,0728	0,0725	0,4894
2007	+0	0,0792	0,0225	0,0003	0,0000	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,0854	0,0444	0,0017	0,0007	0,0032	0,0831	0,0002	0,7813
	+2	0,1171	0,0318	0,0111	0,0071	0,0276	0,0413	0,0000	0,7639
	+3	0,1297	0,0364	0,0178	0,0171	0,2950	0,0400	0,0000	0,4640
	+4	0,0154	0,0215	0,0212	0,0072	0,0142	0,0049	0,0000	0,9155
	+5	0,0240	0,0243	0,0242	0,0239	0,0304	0,0249	0,0243	0,8242
	+6	0,0390	0,0392	0,0391	0,0389	0,0444	0,0397	0,0392	0,7205
	+7	0,0536	0,0538	0,0537	0,0535	0,0581	0,0542	0,0538	0,6192
	+8	0,0673	0,0674	0,0674	0,0672	0,0709	0,0678	0,0674	0,5246
	+9	0,0795	0,0796	0,0796	0,0795	0,0824	0,0799	0,0796	0,4398

Tabela XII – Probabilidades parciais em tempo contínuo entre 2003 e 2007 (obtidas com um único gerador)

Anos	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2008	+0	0,0684	0,0439	0,0008	0,0001	0,0008	0,0320	0,0000	0,8540
	+1	0,1400	0,0534	0,0082	0,0018	0,0082	0,0323	0,0000	0,7560
	+2	0,1193	0,0411	0,0138	0,0114	0,1507	0,0515	0,0000	0,6123
	+3	0,0269	0,0244	0,0176	0,0136	0,0166	0,0057	0,0003	0,8948
	+4	0,0242	0,0244	0,0243	0,0241	0,0305	0,0250	0,0244	0,8231
	+5	0,0368	0,0370	0,0369	0,0367	0,0423	0,0375	0,0370	0,7357
	+6	0,0498	0,0500	0,0499	0,0497	0,0546	0,0505	0,0500	0,6454
	+7	0,0626	0,0628	0,0627	0,0625	0,0665	0,0631	0,0627	0,5570
	+8	0,0745	0,0747	0,0746	0,0745	0,0777	0,0749	0,0746	0,4745
	+9	0,0852	0,0853	0,0853	0,0852	0,0877	0,0856	0,0853	0,4004
2009	+0	0,1631	0,0464	0,0025	0,0000	0,0001	0,0267	0,0000	0,7613
	+1	0,1139	0,0451	0,0222	0,0068	0,0716	0,0471	0,0000	0,6934
	+2	0,0501	0,0557	0,0361	0,0187	0,0166	0,0153	0,0000	0,8075
	+3	0,0329	0,0331	0,0330	0,0328	0,0387	0,0336	0,0331	0,7628
	+4	0,0422	0,0424	0,0423	0,0421	0,0474	0,0429	0,0424	0,6982
	+5	0,0525	0,0527	0,0526	0,0525	0,0571	0,0531	0,0527	0,6267
	+6	0,0632	0,0634	0,0633	0,0632	0,0671	0,0637	0,0634	0,5527
	+7	0,0737	0,0738	0,0738	0,0736	0,0769	0,0741	0,0738	0,4803
	+8	0,0835	0,0836	0,0835	0,0834	0,0861	0,0838	0,0836	0,4125
	+9	0,0923	0,0923	0,0923	0,0922	0,0943	0,0925	0,0923	0,3517
2010	+0	0,1488	0,0219	0,0161	0,0014	0,0002	0,0023	0,0000	0,8093
	+1	0,2254	0,0872	0,0300	0,0102	0,0043	0,0120	0,0000	0,6309
	+2	0,0531	0,0531	0,0530	0,0528	0,0577	0,0535	0,0530	0,6237
	+3	0,0585	0,0586	0,0586	0,0584	0,0627	0,0590	0,0586	0,5856
	+4	0,0652	0,0653	0,0653	0,0651	0,0689	0,0657	0,0653	0,5392
	+5	0,0726	0,0727	0,0727	0,0725	0,0759	0,0730	0,0727	0,4878
	+6	0,0803	0,0804	0,0804	0,0803	0,0831	0,0807	0,0804	0,4345
	+7	0,0878	0,0879	0,0879	0,0878	0,0902	0,0882	0,0879	0,3822
	+8	0,0949	0,0950	0,0950	0,0949	0,0968	0,0952	0,0950	0,3333
	+9	0,1013	0,1013	0,1013	0,1012	0,1028	0,1015	0,1013	0,2893
2011	+0	0,1016	0,0418	0,0079	0,0020	0,0001	0,0053	0,0000	0,8414
	+1	0,0259	0,0233	0,0231	0,0225	0,0329	0,0242	0,0230	0,8251
	+2	0,0287	0,0290	0,0289	0,0286	0,0348	0,0295	0,0290	0,7915
	+3	0,0361	0,0364	0,0363	0,0361	0,0417	0,0369	0,0364	0,7402
	+4	0,0451	0,0454	0,0453	0,0451	0,0502	0,0458	0,0453	0,6779
	+5	0,0551	0,0553	0,0552	0,0550	0,0595	0,0557	0,0553	0,6090
	+6	0,0654	0,0656	0,0655	0,0653	0,0692	0,0659	0,0655	0,5376
	+7	0,0755	0,0756	0,0756	0,0754	0,0786	0,0759	0,0756	0,4678
	+8	0,0849	0,0850	0,0850	0,0849	0,0875	0,0853	0,0850	0,4024
	+9	0,0934	0,0935	0,0935	0,0934	0,0954	0,0937	0,0935	0,3437

Tabela XIII – Probabilidades parciais em tempo contínuo entre 2008 e 2011 (obtidas com um único gerador)

Anos	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2003	+0	0,3463	0,0061	0,0055	0,0000	0,0003	0,0580	0,0000	0,5837
	+1	0,4223	0,0220	0,0162	0,0046	0,0081	0,0739	0,0000	0,4530
	+2	0,0380	0,0549	0,0159	0,0417	0,1257	0,1606	0,0000	0,5632
	+3	0,0359	0,0270	0,0323	0,0254	0,1994	0,0994	0,0129	0,5677
	+4	0,0205	0,0183	0,0126	0,0216	0,1103	0,0754	0,2116	0,5297
	+5	0,0227	0,0057	0,0195	0,0063	0,1599	0,0496	0,2431	0,4932
	+6	0,0176	0,0000	0,0239	0,0047	0,1868	0,0016	0,0000	0,7653
	+7	0,0454	0,0000	0,0252	0,0143	0,2992	0,0000	0,0000	0,6159
	+8	0,0000	0,0000	0,0236	0,0071	0,0577	0,0000	0,0000	0,9116
2004	+0	0,3197	0,0119	0,0045	0,0006	0,0013	0,0503	0,0000	0,6117
	+1	0,1242	0,0401	0,0191	0,0074	0,0197	0,1176	0,0000	0,6720
	+2	0,0749	0,0519	0,0298	0,0153	0,0537	0,0944	0,0003	0,6798
	+3	0,0451	0,0331	0,0150	0,0126	0,0924	0,0753	0,0790	0,6475
	+4	0,0338	0,0212	0,0135	0,0053	0,1118	0,0494	0,1461	0,6189
	+5	0,0671	0,0190	0,0323	0,0140	0,0605	0,0346	0,0000	0,7724
	+6	0,0931	0,0463	0,0269	0,0343	0,2582	0,0036	0,0000	0,5374
	+7	0,0041	0,0219	0,0247	0,0151	0,0139	0,0035	0,0000	0,9168
	+8	0,0019	0,0019	0,0135	0,0075	0,0548	0,0018	0,0019	0,9168
2005	+0	0,1573	0,0221	0,0051	0,0008	0,0035	0,0524	0,0001	0,7589
	+1	0,1095	0,0412	0,0075	0,0059	0,0155	0,0864	0,0000	0,7339
	+2	0,0852	0,0484	0,0099	0,0049	0,0319	0,0734	0,0164	0,7299
	+3	0,0514	0,0249	0,0120	0,0112	0,0636	0,0781	0,1117	0,6470
	+4	0,0805	0,0201	0,0282	0,0058	0,0753	0,0150	0,0000	0,7752
	+5	0,1102	0,0446	0,0273	0,0111	0,2328	0,0255	0,0000	0,5485
	+6	0,0102	0,0131	0,0186	0,0130	0,0352	0,0025	0,0000	0,9074
	+7	0,0060	0,0060	0,0128	0,0089	0,0564	0,0015	0,0010	0,9074
	+8	0,0016	0,0016	0,0171	0,0048	0,0645	0,0015	0,0016	0,9074
2006	+0	0,0916	0,0305	0,0020	0,0001	0,0013	0,0453	0,0000	0,8292
	+1	0,0985	0,0498	0,0022	0,0019	0,0017	0,0888	0,0000	0,7571
	+2	0,0601	0,0509	0,0095	0,0036	0,0322	0,0770	0,0288	0,7380
	+3	0,0928	0,0270	0,0154	0,0059	0,0589	0,0248	0,0000	0,7752
	+4	0,0962	0,0352	0,0159	0,0176	0,3017	0,0423	0,0000	0,4910
	+5	0,0112	0,0156	0,0110	0,0103	0,0184	0,0044	0,0000	0,9291
	+6	0,0049	0,0030	0,0039	0,0031	0,0491	0,0034	0,0034	0,9291
	+7	0,0021	0,0021	0,0082	0,0056	0,0486	0,0024	0,0020	0,9291
	+8	0,0022	0,0022	0,0104	0,0028	0,0490	0,0022	0,0022	0,9291
2007	+0	0,0792	0,0225	0,0003	0,0000	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,0854	0,0444	0,0017	0,0007	0,0032	0,0831	0,0002	0,7813
	+2	0,1171	0,0318	0,0111	0,0071	0,0276	0,0413	0,0000	0,7639
	+3	0,1297	0,0364	0,0178	0,0171	0,2950	0,0400	0,0000	0,4640
	+4	0,0154	0,0215	0,0212	0,0072	0,0142	0,0049	0,0000	0,9155
	+5	0,0135	0,0053	0,0051	0,0039	0,0462	0,0051	0,0055	0,9155
	+6	0,0072	0,0032	0,0034	0,0028	0,0645	0,0017	0,0017	0,9155
	+7	0,0022	0,0022	0,0097	0,0062	0,0612	0,0018	0,0013	0,9155
	+8	0,0018	0,0018	0,0143	0,0031	0,0598	0,0018	0,0019	0,9155

Tabela XIV - Probabilidades parciais em tempo discreto entre 2003 e 2007

Anos	Períodos	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2008	+0	0,0684	0,0439	0,0008	0,0001	0,0008	0,0320	0,0000	0,8540
	+1	0,1400	0,0534	0,0082	0,0018	0,0082	0,0323	0,0000	0,7560
	+2	0,1193	0,0411	0,0138	0,0114	0,1507	0,0515	0,0000	0,6123
	+3	0,0269	0,0244	0,0176	0,0136	0,0166	0,0057	0,0003	0,8948
	+4	0,0214	0,0046	0,0007	0,0033	0,1287	0,0034	0,0059	0,8834
	+5	0,0269	0,0039	0,0024	0,0018	0,0762	0,0025	0,0028	0,8834
	+6	0,0133	0,0040	0,0034	0,0025	0,0910	0,0012	0,0012	0,8834
	+7	0,0034	0,0036	0,0135	0,0078	0,0851	0,0019	0,0012	0,8834
	+8	0,0023	0,0023	0,0238	0,0048	0,0788	0,0023	0,0023	0,8834
2009	+0	0,1631	0,0464	0,0025	0,0000	0,0001	0,0267	0,0000	0,7613
	+1	0,1139	0,0451	0,0222	0,0068	0,0716	0,0471	0,0000	0,6934
	+2	0,0501	0,0557	0,0361	0,0187	0,0166	0,0153	0,0000	0,8075
	+3	0,0525	0,0226	0,0149	0,0123	0,1117	0,0235	0,0211	0,7802
	+4	0,0442	0,0146	0,0108	0,0065	0,1361	0,0187	0,0243	0,7735
	+5	0,0507	0,0164	0,0131	0,0070	0,1136	0,0132	0,0125	0,7735
	+6	0,0351	0,0166	0,0141	0,0125	0,1348	0,0066	0,0066	0,7735
	+7	0,0123	0,0033	0,0124	0,0072	0,0785	0,0017	0,0011	0,8834
	+8	0,0021	0,0021	0,0249	0,0059	0,0775	0,0020	0,0021	0,8834
2010	+0	0,1488	0,0219	0,0161	0,0014	0,0002	0,0023	0,0000	0,8093
	+1	0,2254	0,0872	0,0300	0,0102	0,0043	0,0120	0,0000	0,6309
	+2	0,1078	0,0614	0,0189	0,0148	0,0851	0,0753	0,0059	0,6309
	+3	0,0822	0,0363	0,0205	0,0153	0,1255	0,0505	0,0270	0,6428
	+4	0,0633	0,0308	0,0233	0,0156	0,1368	0,0356	0,0415	0,6531
	+5	0,0716	0,0351	0,0304	0,0190	0,1316	0,0305	0,0287	0,6531
	+6	0,0577	0,0362	0,0330	0,0310	0,1480	0,0205	0,0205	0,6531
	+7	0,0248	0,0029	0,0109	0,0064	0,0691	0,0015	0,0010	0,8834
	+8	0,0017	0,0017	0,0264	0,0074	0,0757	0,0017	0,0018	0,8834
2011	+0	0,1016	0,0418	0,0079	0,0020	0,0001	0,0053	0,0000	0,8414
	+1	0,1516	0,0448	0,0110	0,0029	0,0150	0,0503	0,0007	0,7237
	+2	0,0848	0,0417	0,0155	0,0101	0,0635	0,0545	0,0062	0,7237
	+3	0,0681	0,0272	0,0159	0,0126	0,1181	0,0366	0,0219	0,6995
	+4	0,0546	0,0236	0,0181	0,0125	0,1348	0,0281	0,0338	0,6945
	+5	0,0646	0,0278	0,0237	0,0149	0,1283	0,0238	0,0225	0,6945
	+6	0,0501	0,0289	0,0258	0,0240	0,1454	0,0156	0,0156	0,6945
	+7	0,0320	0,0326	0,0423	0,0317	0,1244	0,0216	0,0208	0,6945
	+8	0,0289	0,0289	0,0583	0,0355	0,0959	0,0289	0,0291	0,6945

Tabela XV - Probabilidades parciais em tempo discreto entre 2008 e 2011

Ano	Período	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2003	+0	0,3463	0,0061	0,0055	0,0000	0,0003	0,0580	0,0000	0,5837
	+1	0,5928	0,0190	0,0150	0,0027	0,0050	0,1011	0,0000	0,2644
	+2	0,6029	0,0335	0,0192	0,0137	0,0382	0,1436	0,0000	0,1489
	+3	0,6082	0,0375	0,0240	0,0175	0,0679	0,1584	0,0019	0,0845
	+4	0,6099	0,0391	0,0251	0,0193	0,0773	0,1648	0,0198	0,0448
	+5	0,6110	0,0393	0,0259	0,0196	0,0844	0,1670	0,0307	0,0221
	+6	0,6113	0,0393	0,0265	0,0197	0,0885	0,1670	0,0307	0,0169
	+7	0,6121	0,0393	0,0269	0,0200	0,0936	0,1670	0,0307	0,0104
	+8	0,6121	0,0393	0,0271	0,0200	0,0942	0,1670	0,0307	0,0095
	+9	0,6124	0,0396	0,0274	0,0203	0,0946	0,1673	0,0310	0,0074
2004	+0	0,3197	0,0119	0,0045	0,0006	0,0013	0,0503	0,0000	0,6117
	+1	0,3957	0,0364	0,0161	0,0051	0,0134	0,1223	0,0000	0,4110
	+2	0,4265	0,0577	0,0284	0,0114	0,0355	0,1611	0,0001	0,2794
	+3	0,4391	0,0669	0,0326	0,0149	0,0613	0,1821	0,0222	0,1809
	+4	0,4452	0,0708	0,0350	0,0158	0,0815	0,1910	0,0486	0,1120
	+5	0,4527	0,0729	0,0386	0,0174	0,0883	0,1949	0,0486	0,0865
	+6	0,4608	0,0769	0,0410	0,0204	0,1106	0,1952	0,0486	0,0465
	+7	0,4609	0,0779	0,0421	0,0211	0,1113	0,1954	0,0486	0,0426
	+8	0,4623	0,0793	0,0435	0,0224	0,1129	0,1968	0,0500	0,0327
	+9	0,4640	0,0810	0,0452	0,0241	0,1148	0,1985	0,0517	0,0206
2005	+0	0,1573	0,0221	0,0051	0,0008	0,0035	0,0524	0,0001	0,7589
	+1	0,2403	0,0533	0,0108	0,0053	0,0152	0,1179	0,0001	0,5570
	+2	0,2878	0,0803	0,0163	0,0080	0,0330	0,1588	0,0092	0,4065
	+3	0,3087	0,0904	0,0212	0,0126	0,0589	0,1906	0,0546	0,2630
	+4	0,3299	0,0957	0,0286	0,0141	0,0787	0,1945	0,0546	0,2039
	+5	0,3524	0,1048	0,0342	0,0163	0,1261	0,1997	0,0546	0,1118
	+6	0,3535	0,1063	0,0363	0,0178	0,1301	0,2000	0,0546	0,1015
	+7	0,3564	0,1092	0,0392	0,0207	0,1336	0,2030	0,0575	0,0804
	+8	0,3602	0,1130	0,0430	0,0245	0,1378	0,2068	0,0614	0,0534
	+9	0,3636	0,1164	0,0464	0,0279	0,1414	0,2103	0,0648	0,0293
2006	+0	0,0916	0,0305	0,0020	0,0001	0,0013	0,0453	0,0000	0,8292
	+1	0,1732	0,0718	0,0038	0,0017	0,0027	0,1189	0,0000	0,6278
	+2	0,2109	0,1038	0,0098	0,0039	0,0229	0,1673	0,0181	0,4633
	+3	0,2539	0,1163	0,0169	0,0067	0,0502	0,1787	0,0181	0,3592
	+4	0,2885	0,1289	0,0226	0,0130	0,1585	0,1939	0,0181	0,1764
	+5	0,2905	0,1317	0,0246	0,0148	0,1618	0,1947	0,0181	0,1639
	+6	0,2946	0,1359	0,0287	0,0189	0,1669	0,1990	0,0223	0,1336
	+7	0,3003	0,1416	0,0344	0,0246	0,1733	0,2047	0,0280	0,0932
	+8	0,3057	0,1470	0,0398	0,0300	0,1791	0,2102	0,0334	0,0548
	+9	0,3097	0,1510	0,0438	0,0339	0,1832	0,2142	0,0374	0,0268
2007	+0	0,0792	0,0225	0,0003	0,0000	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,1519	0,0603	0,0017	0,0006	0,0029	0,1164	0,0007	0,6655
	+2	0,2299	0,0814	0,0091	0,0054	0,0212	0,1438	0,0007	0,5084
	+3	0,2958	0,0999	0,0181	0,0141	0,1712	0,1642	0,0007	0,2359
	+4	0,2995	0,1050	0,0231	0,0158	0,1746	0,1653	0,0007	0,2160
	+5	0,3046	0,1103	0,0284	0,0209	0,1811	0,1707	0,0060	0,1780
	+6	0,3116	0,1172	0,0353	0,0279	0,1890	0,1778	0,0130	0,1282
	+7	0,3185	0,1241	0,0422	0,0347	0,1965	0,1847	0,0199	0,0794
	+8	0,3238	0,1295	0,0476	0,0401	0,2021	0,1901	0,0252	0,0417
	+9	0,3271	0,1328	0,0509	0,0434	0,2055	0,1934	0,0285	0,0183

Tabela XVI – Probabilidades globais (todos os contratos e um gerador) em tempo contínuo entre 2003 e 2007

Ano	Período	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2008	+0	0,0684	0,0439	0,0008	0,0001	0,0008	0,0320	0,0000	0,8540
	+1	0,1880	0,0894	0,0078	0,0016	0,0078	0,0596	0,0000	0,6457
	+2	0,2650	0,1160	0,0168	0,0090	0,1051	0,0929	0,0000	0,3953
	+3	0,2756	0,1256	0,0237	0,0144	0,1117	0,0951	0,0001	0,3537
	+4	0,2842	0,1342	0,0323	0,0229	0,1225	0,1040	0,0088	0,2912
	+5	0,2949	0,1450	0,0431	0,0336	0,1348	0,1149	0,0195	0,2142
	+6	0,3055	0,1557	0,0538	0,0442	0,1465	0,1257	0,0302	0,1383
	+7	0,3142	0,1644	0,0624	0,0529	0,1557	0,1344	0,0389	0,0770
	+8	0,3199	0,1702	0,0682	0,0586	0,1617	0,1402	0,0447	0,0365
2009	+9	0,3231	0,1733	0,0713	0,0617	0,1649	0,1433	0,0478	0,0146
	+0	0,1631	0,0464	0,0025	0,0000	0,0001	0,0267	0,0000	0,7613
	+1	0,2498	0,0807	0,0194	0,0052	0,0546	0,0625	0,0000	0,5278
	+2	0,2762	0,1101	0,0384	0,0151	0,0634	0,0706	0,0000	0,4262
	+3	0,2902	0,1242	0,0525	0,0290	0,0799	0,0850	0,0141	0,3251
	+4	0,3040	0,1380	0,0663	0,0427	0,0953	0,0989	0,0279	0,2270
	+5	0,3159	0,1499	0,0782	0,0546	0,1082	0,1110	0,0399	0,1423
	+6	0,3249	0,1590	0,0872	0,0636	0,1178	0,1201	0,0489	0,0786
	+7	0,3307	0,1648	0,0930	0,0694	0,1238	0,1259	0,0547	0,0378
2010	+8	0,3338	0,1679	0,0962	0,0726	0,1271	0,1290	0,0578	0,0156
	+9	0,3353	0,1694	0,0976	0,0740	0,1286	0,1305	0,0593	0,0055
	+0	0,1488	0,0219	0,0161	0,0014	0,0002	0,0023	0,0000	0,8093
	+1	0,3312	0,0925	0,0403	0,0097	0,0037	0,0120	0,0000	0,5105
	+2	0,3583	0,1196	0,0674	0,0367	0,0332	0,0393	0,0271	0,3184
	+3	0,3769	0,1383	0,0861	0,0553	0,0532	0,0581	0,0457	0,1865
	+4	0,3891	0,1504	0,0982	0,0674	0,0660	0,0704	0,0579	0,1005
	+5	0,3964	0,1578	0,1055	0,0747	0,0736	0,0777	0,0652	0,0490
	+6	0,4003	0,1617	0,1095	0,0786	0,0777	0,0817	0,0692	0,0213
2011	+7	0,4022	0,1636	0,1113	0,0805	0,0796	0,0835	0,0711	0,0081
	+8	0,4030	0,1643	0,1121	0,0813	0,0804	0,0843	0,0718	0,0027
	+9	0,4032	0,1646	0,1124	0,0815	0,0807	0,0846	0,0721	0,0008
	+0	0,1016	0,0418	0,0079	0,0020	0,0001	0,0053	0,0000	0,8414
	+1	0,1233	0,0614	0,0273	0,0209	0,0278	0,0257	0,0193	0,6942
	+2	0,1433	0,0815	0,0474	0,0408	0,0519	0,0462	0,0394	0,5495
	+3	0,1631	0,1015	0,0673	0,0606	0,0749	0,0664	0,0594	0,4067
	+4	0,1815	0,1199	0,0857	0,0789	0,0953	0,0851	0,0778	0,2757
	+5	0,1967	0,1352	0,1010	0,0941	0,1117	0,1004	0,0931	0,1679
2011	+6	0,2076	0,1462	0,1119	0,1051	0,1233	0,1115	0,1041	0,0903
	+7	0,2145	0,1530	0,1188	0,1119	0,1304	0,1183	0,1109	0,0422
	+8	0,2180	0,1566	0,1224	0,1155	0,1341	0,1219	0,1145	0,0170

Tabela XVII – Probabilidades globais (todos os contratos e um gerador) em tempo contínuo entre 2008 e 2011

Ano	Período	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2003	+0	0,3463	0,0061	0,0055	0,0000	0,0003	0,0580	0,0000	0,5837
	+1	0,5928	0,0190	0,0150	0,0027	0,0050	0,1011	0,0000	0,2644
	+2	0,6029	0,0335	0,0192	0,0137	0,0382	0,1436	0,0000	0,1489
	+3	0,6082	0,0375	0,0240	0,0175	0,0679	0,1584	0,0019	0,0845
	+4	0,6099	0,0391	0,0251	0,0193	0,0773	0,1648	0,0198	0,0448
	+5	0,6110	0,0393	0,0259	0,0196	0,0844	0,1670	0,0307	0,0221
	+6	0,6113	0,0393	0,0265	0,0197	0,0885	0,1670	0,0307	0,0169
	+7	0,6121	0,0393	0,0269	0,0200	0,0936	0,1670	0,0307	0,0104
2004	+8	0,6121	0,0393	0,0271	0,0200	0,0942	0,1670	0,0307	0,0095
	+0	0,3197	0,0119	0,0045	0,0006	0,0013	0,0503	0,0000	0,6117
	+1	0,3957	0,0364	0,0161	0,0051	0,0134	0,1223	0,0000	0,4110
	+2	0,4265	0,0577	0,0284	0,0114	0,0355	0,1611	0,0001	0,2794
	+3	0,4391	0,0669	0,0326	0,0149	0,0613	0,1821	0,0222	0,1809
	+4	0,4452	0,0708	0,0350	0,0158	0,0815	0,1910	0,0486	0,1120
	+5	0,4527	0,0729	0,0386	0,0174	0,0883	0,1949	0,0486	0,0865
	+6	0,4608	0,0769	0,0410	0,0204	0,1106	0,1952	0,0486	0,0465
2005	+7	0,4609	0,0779	0,0421	0,0211	0,1113	0,1954	0,0486	0,0426
	+8	0,4610	0,0780	0,0427	0,0214	0,1136	0,1955	0,0487	0,0391
	+0	0,1573	0,0221	0,0051	0,0008	0,0035	0,0524	0,0001	0,7589
	+1	0,2403	0,0533	0,0108	0,0053	0,0152	0,1179	0,0001	0,5570
	+2	0,2878	0,0803	0,0163	0,0080	0,0330	0,1588	0,0092	0,4065
	+3	0,3087	0,0904	0,0212	0,0126	0,0589	0,1906	0,0546	0,2630
	+4	0,3299	0,0957	0,0286	0,0141	0,0787	0,1945	0,0546	0,2039
	+5	0,3524	0,1048	0,0342	0,0163	0,1261	0,1997	0,0546	0,1118
2006	+6	0,3535	0,1063	0,0363	0,0178	0,1301	0,2000	0,0546	0,1015
	+7	0,3541	0,1069	0,0376	0,0187	0,1358	0,2001	0,0547	0,0921
	+8	0,3543	0,1070	0,0391	0,0191	0,1417	0,2003	0,0549	0,0835
	+0	0,0916	0,0305	0,0020	0,0001	0,0013	0,0453	0,0000	0,8292
	+1	0,1732	0,0718	0,0038	0,0017	0,0027	0,1189	0,0000	0,6278
	+2	0,2109	0,1038	0,0098	0,0039	0,0229	0,1673	0,0181	0,4633
	+3	0,2539	0,1163	0,0169	0,0067	0,0502	0,1787	0,0181	0,3592
	+4	0,2885	0,1289	0,0226	0,0130	0,1585	0,1939	0,0181	0,1764
2007	+5	0,2905	0,1317	0,0246	0,0148	0,1618	0,1947	0,0181	0,1639
	+6	0,2913	0,1322	0,0252	0,0153	0,1698	0,1953	0,0187	0,1522
	+7	0,2916	0,1325	0,0264	0,0162	0,1772	0,1956	0,0190	0,1415
	+8	0,2919	0,1328	0,0279	0,0166	0,1841	0,1959	0,0193	0,1314
	+0	0,0792	0,0225	0,0003	0,0000	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,1519	0,0603	0,0017	0,0006	0,0029	0,1164	0,0007	0,6655
	+2	0,2299	0,0814	0,0091	0,0054	0,0212	0,1438	0,0007	0,5084
	+3	0,2958	0,0999	0,0181	0,0141	0,1712	0,1642	0,0007	0,2359
	+4	0,2995	0,1050	0,0231	0,0158	0,1746	0,1653	0,0007	0,2160
	+5	0,3024	0,1062	0,0242	0,0166	0,1845	0,1664	0,0019	0,1977
	+6	0,3038	0,1068	0,0249	0,0172	0,1973	0,1668	0,0023	0,1810
	+7	0,3042	0,1072	0,0267	0,0183	0,2084	0,1671	0,0025	0,1657
	+8	0,3045	0,1075	0,0280	0,0188	0,2188	0,1674	0,0028	0,1517
	+0	0,0845	0,0235	0,0005	0,0002	0,0001	0,0456	0,0006	0,8518
	+1	0,1519	0,0603	0,0017	0,0006	0,0029	0,1164	0,0007	0,6655
	+2	0,2299	0,0814	0,0091	0,0054	0,0212	0,1438	0,0007	0,5084

Tabela XVIII – Probabilidades globais (todos os contratos) em tempo discreto entre 2003 e 2007

Ano	Período	Ramos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2008	+0	0,0684	0,0439	0,0008	0,0001	0,0008	0,0320	0,0000	0,8540
	+1	0,1880	0,0894	0,0078	0,0016	0,0078	0,0596	0,0000	0,6457
	+2	0,2650	0,1160	0,0168	0,0090	0,1051	0,0929	0,0000	0,3953
	+3	0,2756	0,1256	0,0237	0,0144	0,1117	0,0951	0,0001	0,3537
	+4	0,2832	0,1272	0,0240	0,0156	0,1572	0,0963	0,0022	0,3125
	+5	0,2916	0,1284	0,0247	0,0161	0,1810	0,0971	0,0031	0,2761
	+6	0,2953	0,1296	0,0257	0,0168	0,2062	0,0974	0,0034	0,2439
	+7	0,2961	0,1304	0,0290	0,0188	0,2269	0,0979	0,0037	0,2155
	+8	0,2966	0,1309	0,0341	0,0198	0,2439	0,0984	0,0042	0,1904
2009	+0	0,1631	0,0464	0,0025	0,0000	0,0001	0,0267	0,0000	0,7613
	+1	0,2498	0,0807	0,0194	0,0052	0,0546	0,0625	0,0000	0,5278
	+2	0,2762	0,1101	0,0384	0,0151	0,0634	0,0706	0,0000	0,4262
	+3	0,2986	0,1197	0,0448	0,0203	0,1110	0,0806	0,0090	0,3325
	+4	0,3133	0,1245	0,0484	0,0225	0,1562	0,0869	0,0171	0,2572
	+5	0,3263	0,1288	0,0517	0,0243	0,1854	0,0903	0,0203	0,1990
	+6	0,3333	0,1321	0,0545	0,0268	0,2123	0,0916	0,0216	0,1539
	+7	0,3352	0,1326	0,0565	0,0279	0,2243	0,0919	0,0218	0,1360
	+8	0,3355	0,1329	0,0598	0,0287	0,2349	0,0921	0,0221	0,1201
2010	+0	0,1488	0,0219	0,0161	0,0014	0,0002	0,0023	0,0000	0,8093
	+1	0,3312	0,0925	0,0403	0,0097	0,0037	0,0120	0,0000	0,5105
	+2	0,3862	0,1238	0,0500	0,0173	0,0472	0,0505	0,0030	0,3221
	+3	0,4127	0,1355	0,0566	0,0222	0,0876	0,0667	0,0117	0,2070
	+4	0,4258	0,1419	0,0614	0,0254	0,1159	0,0741	0,0203	0,1352
	+5	0,4355	0,1466	0,0655	0,0280	0,1337	0,0782	0,0242	0,0883
	+6	0,4406	0,1498	0,0684	0,0307	0,1468	0,0800	0,0260	0,0577
	+7	0,4420	0,1500	0,0691	0,0311	0,1507	0,0801	0,0260	0,0510
	+8	0,4421	0,1501	0,0704	0,0315	0,1546	0,0802	0,0261	0,0450
2011	+0	0,1016	0,0418	0,0079	0,0020	0,0001	0,0053	0,0000	0,8414
	+1	0,2291	0,0795	0,0171	0,0045	0,0127	0,0476	0,0006	0,6089
	+2	0,2808	0,1049	0,0265	0,0106	0,0514	0,0807	0,0044	0,4407
	+3	0,3108	0,1169	0,0336	0,0162	0,1034	0,0969	0,0140	0,3082
	+4	0,3276	0,1241	0,0391	0,0200	0,1450	0,1055	0,0245	0,2141
	+5	0,3415	0,1301	0,0442	0,0232	0,1724	0,1106	0,0293	0,1487
	+6	0,3489	0,1344	0,0480	0,0268	0,1941	0,1129	0,0316	0,1033
	+7	0,3522	0,1378	0,0524	0,0301	0,2069	0,1152	0,0338	0,0717
	+8	0,3543	0,1398	0,0566	0,0326	0,2138	0,1172	0,0358	0,0498

Tabela XIX - Probabilidades globais (todos os contratos) em tempo discreto entre 2008 e 2011

ANEXO C - Evolução das Probabilidades Globais por Ramo

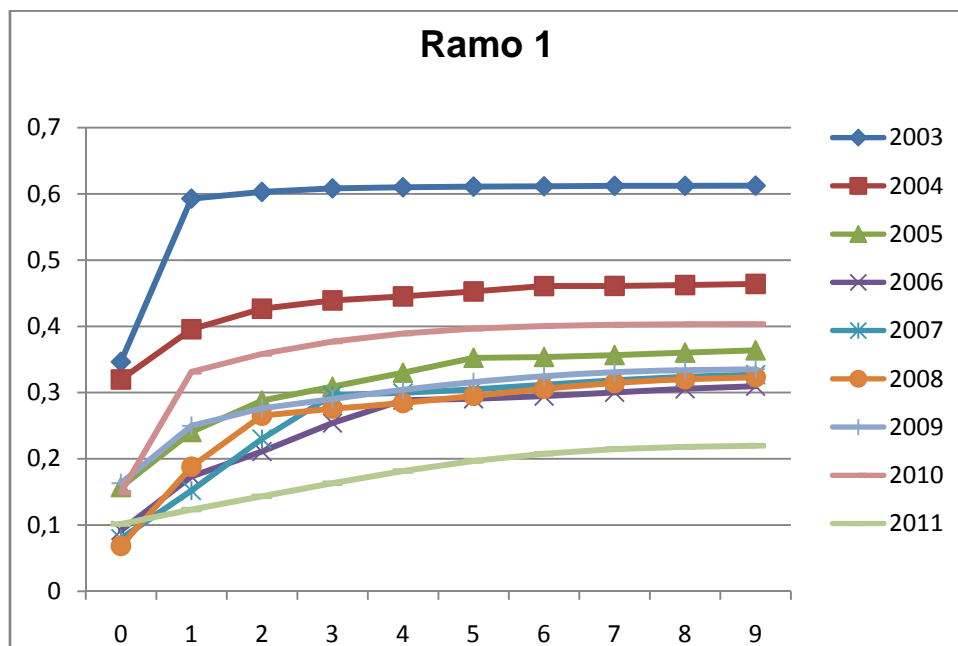


Figura 5 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 1

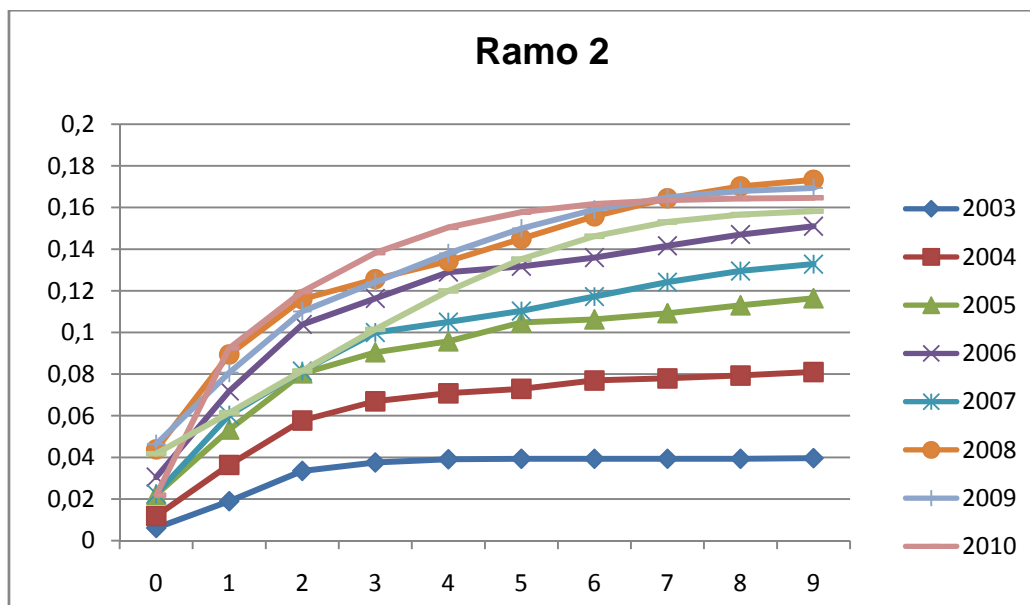


Figura 6 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 2

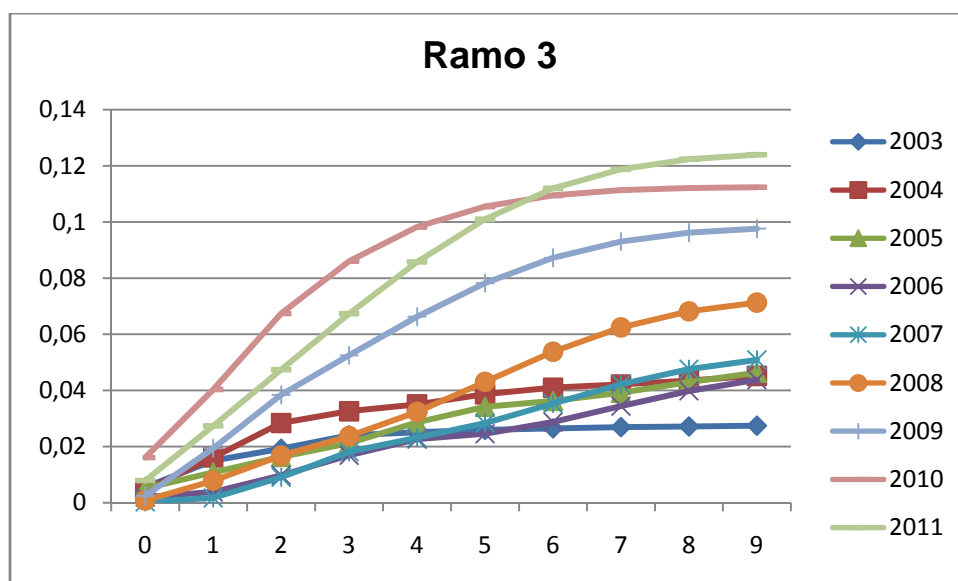


Figura 7 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 3

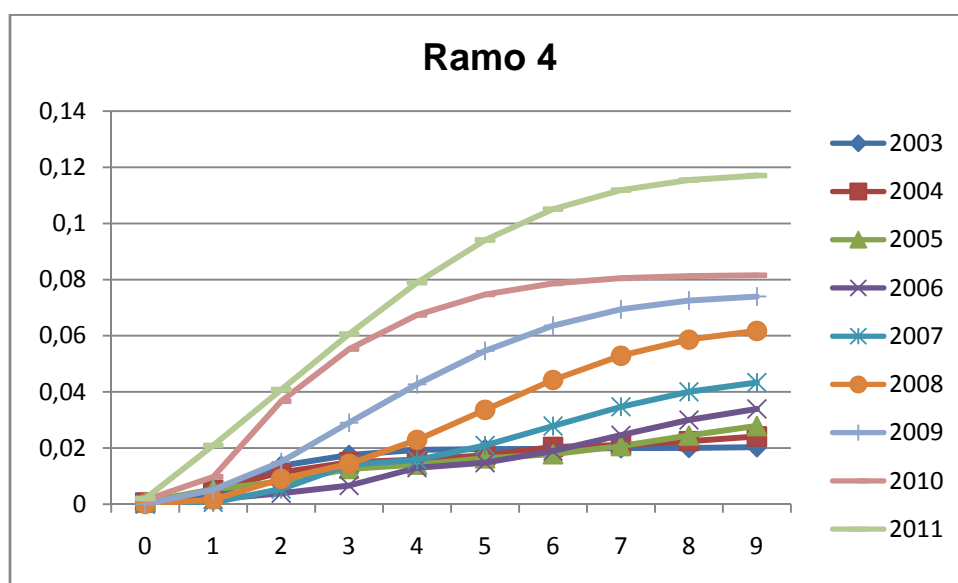


Figura 8 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 4

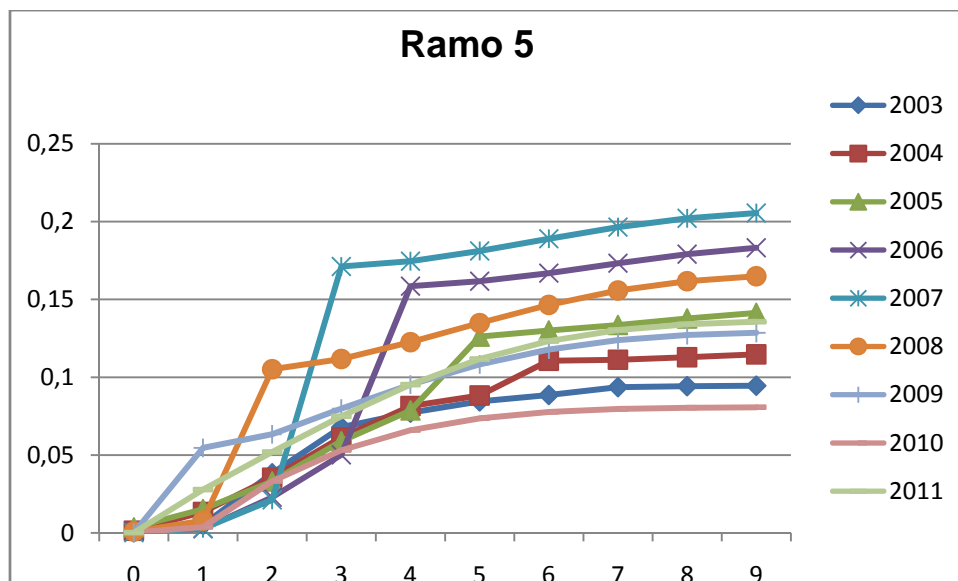


Figura 9 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 5

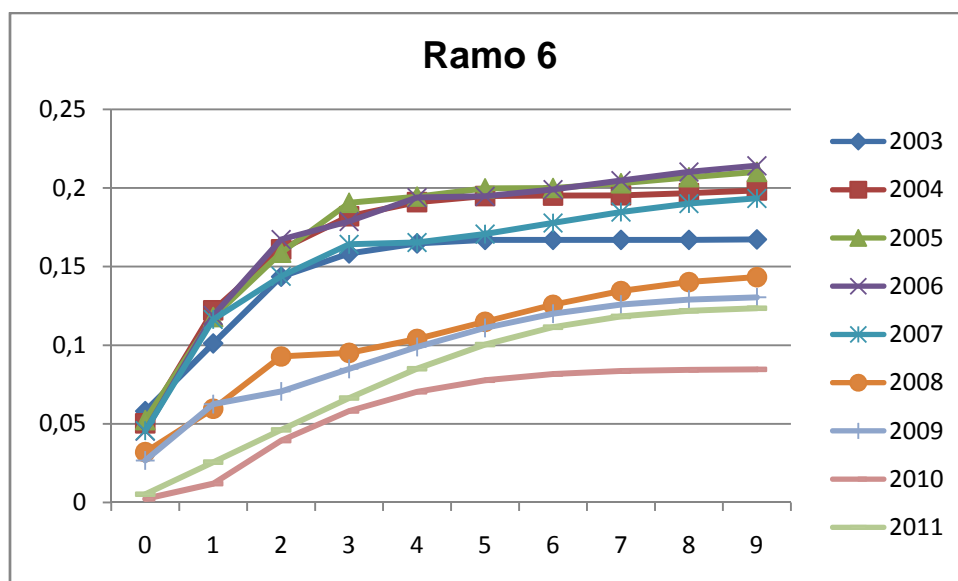


Figura 10 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 6

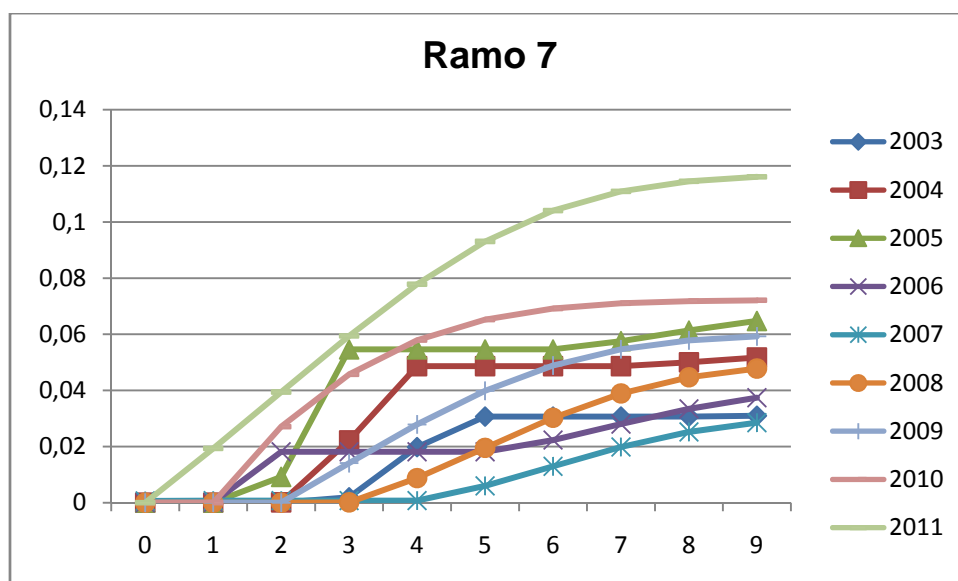


Figura 11 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 7

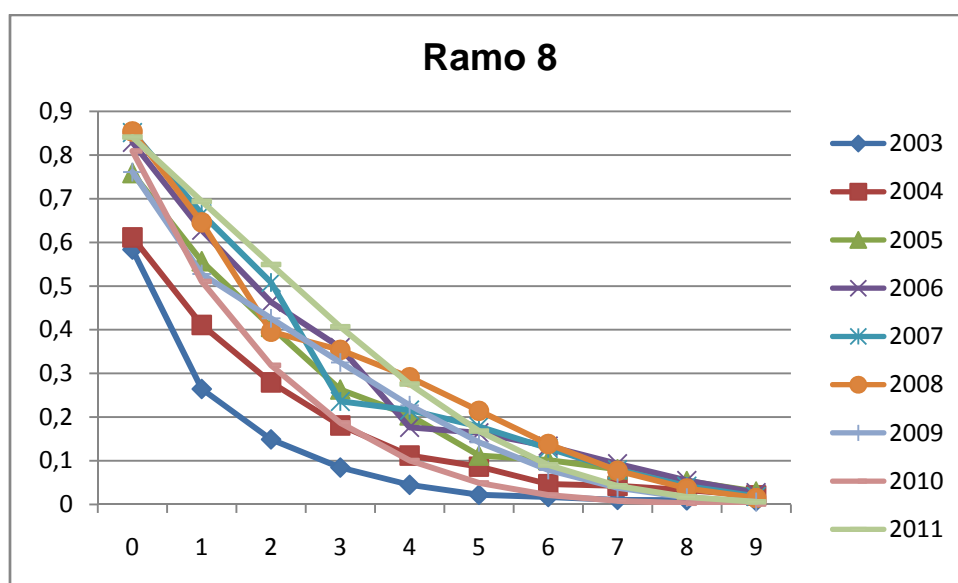


Figura 12 – Evolução das probabilidades globais para os diferentes anos do ramo 8